Mathematisches Institut
der Universität München
W. Zimmermann

WS 2004/2005
Blatt 13

Ferienblatt zur Algebra I

1. Sei R ein Integritätsring und seien $r, s, d \in R \setminus \{0\}$.
   (a) Wenn in R zu r und s ein kleinstes gemeinsames Vielfaches v existiert, dann existiert auch ein größter gemeinsamer Teiler t, und es gilt $rs \sim vt$.
   (b) Existiert ein größter gemeinsamer Teiler h von rd und sd, so existiert auch ein größter gemeinsamer Teiler t von r und s, und es ist $h \sim td$.
   (c) Zu je zwei Elementen in $R \setminus \{0\}$ existiere ein größter gemeinsamer Teiler. Sind r und d teilerfremd und auch s und d teilerfremd, dann sind auch rs und d teilerfremd.
   (d) Zu je zwei Elementen in $R \setminus \{0\}$ existiere ein größter gemeinsamer Teiler, und r und s seien teilerfremd. Gilt $r \mid sd$, so gilt auch $r \mid d$; gilt $r \mid d$ und $s \mid d$, so gilt auch $rs \mid d$.
   (e) Genau dann existiert zu je zwei Elementen in $R \setminus \{0\}$ ein größter gemeinsamer Teiler, wenn auch zu je zwei Elementen in $R \setminus \{0\}$ ein kleinstes gemeinsames Vielfaches existiert.

2. Gegeben sei der Unterring $R_{-3} = \mathbb{Z}[\sqrt{-3}] = \{a + b\sqrt{-3} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ von $\mathbb{C}$. Zeige:
   (a) Die Einheiten von R_{-3} sind 1 und -1.
   (b) Die Elemente
   $$2, \qquad 1 + \sqrt{-3}, \qquad 1 - \sqrt{-3}$$
   sind irreduzibel, aber keine Primelemente.
   (c) Das Ideal $(2) \cap (1 + \sqrt{-3})$ ist kein Hauptideal.

   (Hinweis: Verwende die Abbildung $R_{-3} \to \mathbb{N}_0,\ z \mapsto z\bar{z}$.)

3. Wir betrachten den Unterring $R_{-5} = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = \{a + b\sqrt{-5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ von $\mathbb{C}$. Beweise:

   (a) 3 und $2 + \sqrt{-5}$ sind teilerfremd, aber das Ideal $(3, 2 + \sqrt{-5})$ ist kein Hauptideal.

   (b) $3 \cdot 3$ und $3 \cdot (2 + \sqrt{-5})$ haben keinen größten gemeinsamen Teiler.

   (Hinweis: Verwende die Abbildung $R_{-5} \to \mathbb{N}_0,\ z \mapsto z\bar{z}$.)

4. Sei K ein Körper und R der Unterring von $K[X]$, der aus den Polynomen

$$f = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i X^i$$

   mit $\alpha_1 = 0$ besteht. Zeige:

   (a) X^2 und X^3 sind teilerfremd, besitzen aber kein kleinstes gemeinsames Vielfaches in R.

   (b) $X^2 \cdot X^3$ und $X^3 \cdot X^3$ besitzen keinen größten gemeinsamen Teiler.

5. (a) Berechne in $\mathbb{Z}$ die Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ mit

$$(533, 2009) = (n)$$

   sowie $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $n = 533a + 2009b$.

   (b) Bestimme alle $x \in \mathbb{Z}$ mit $37x \cong 1 \pmod{125}$.

Die Bearbeitung des Ferienblattes ist freiwillig, es wird weder korrigiert noch bewertet. Wir wünschen angenehme Semesterferien.