Mathematisches Institut
der Universität München
L. Angeleri-Hügel

WS 2001/2002
Blatt 8

Algebra I

30. Sei $i = \sqrt{-1} \in \mathbb{C}$ und $R = \mathbb{Z}[i] = \{a + b\,i \,|\, a, b \in \mathbb{Z}\}$.

    (a) Man zeige, daß R ein Unterring von $\mathbb{C}$ ist.

    (b) Betrachte die Abbildung

    $$\delta : R \to \mathbb{N}_0,\ \ a + b\,i \mapsto a^2 + b^2$$

    Man zeige, daß daß (R, δ) ein euklidischer Ring ist.

    (c) Man bestimme die Einheitengruppe R^*.

    (d) Man zeige, daß $2 = (1+i)(1-i)$ die Primfaktorzerlegung von $2 \in R$ ist. (5)

31. Sei R ein Integritätsring mit einem Element x, das irreduzibel, aber nicht Primelement ist. Es gibt also zwei Elemente $a, b \in R$ mit der Eigenschaft $x \mid ab$, $x \nmid a$, $x \nmid b$. Dafür zeige man:

    (a) Die Ideale $(x) \cap (a)$ und (x, a) sind nicht zyklisch.

    (b) Das Paar x, a besitzt einen größten gemeinsamen Teiler.

    (c) Das Paar xb, ab besitzt keinen größten gemeinsamen Teiler. (5)

32. Seien R ein Integritätsring und $x, a, b \in R$. Man zeige:

    (a) Ist x Produkt von Primelementen, so gibt es nur endlich viele zyklische Ideale von R, die x enthalten.

    (b) Genau dann besitzt das Paar a, b ein kleinstes gemeinsames Vielfaches, wenn für alle $r \in R$ das Paar ra, rb einen größten gemeinsamen Teiler besitzt. (5)

33. (a) Seien $n = 632$ und $m = 547$. Man entscheide, ob $\overline{m} \in \mathbb{Z}/(n)$ invertierbar ist; wenn ja, gebe man das Inverse an.

(b) Man bestimme in $\mathbb{Q}[X]$ einen größten gemeinsamen Teiler der beiden Polynome

$$f = X^5 + 2X^3 + X^2 + X + 1, \quad g = X^4 - 1$$

und schreibe ihn als Linearkombination von f und g. (5)

Abgabe: Montag, 17.12.2001, 11.00 Uhr, Übungskasten im 1. Stock des Mathematischen Instituts. Bitte geben Sie auf Ihrer Lösung Ihre Übungsgruppe an.