Mathematisches Institut
der Universität München
L. Angeleri-Hügel

WS 2001/2002
Blatt 7

Algebra I

26. Sei $(G, +)$ eine abelsche Gruppe. Man zeige, daß die Menge $\mathrm{End}(G)$ aller Endomorphismen von G mit der punktweisen Addition und der Hintereinanderausführung von Abbildungen einen Ring bildet. (3)

27. Sei K ein Körper und $R = \{\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta, \gamma \in K\}$.

    (a) Man zeige, daß R ein Unterring von $K^{2,2}$ ist. (1)

    (b) Man zeige, daß

    $$R\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ R\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } R\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \lambda \in K,$$

    die paarweise verschiedenen nicht-trivialen zyklischen Linksideale von R sind. (3)

    (c) Man bestimme alle Linksideale und alle Ideale von R. (3)

28. Man löse folgende Aufgabe aus dem Buch "Suan Ching" (Klassische Arithmetik) des chinesischen Mathematikers Sun Tsu (Han-Dynastie): "There are certain things whose number is unknown. Repeatedly divide by 3, the remainder is 2, by 5 the remainder is 3, and by 7 the remainder is 2. What will be the number?"

    (Geben Sie alle Zahlen mit diesen Eigenschaften an und begründen Sie Ihre Lösung.) (3)

29. Sei $R \neq 0$ ein kommutativer Ring.

    (a) In der Menge aller Primideale von R betrachte man eine Kette K (bzgl. der Inklusion). Man zeige, daß der Durchschnitt aller Ideale aus K wieder ein Primideal ist. (2)

(b) Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal, das Durchschnitt von Primidealen ist. Man zeige, daß $\mathfrak{a}$ sich schreiben läßt als

$$\mathfrak{a} = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{p}_i$$

für Primideale $\mathfrak{p}_i$, die minimal über $\mathfrak{a}$ liegen, die also minimale Elemente der Menge

$$\{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \text{ ist Primideal und } \mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}\}$$

sind. (Dabei heißt ein Element y einer geordneten Menge $(M, \leq)$ minimal, falls es kein $y' \in M$ mit $y' \leq y$ und $y' \neq y$ gibt.) (5)

Abgabe: Montag, 10.12.2001, 11.00 Uhr, Übungskasten im 1. Stock des Mathematischen Instituts. Bitte geben Sie auf Ihrer Lösung Ihre Übungsgruppe an.