Mathematisches Institut
der Universität München
L. Angeleri-Hügel

WS 2001/2002
Blatt 6

Algebra I

21. Seien p und q zwei Primzahlen mit $p < q$. Sei G eine Gruppe der Ordnung pq und seien P bzw. Q die p-Sylowgruppe bzw. die q-Sylowgruppe von G. Man zeige:

    (a) P und Q sind zyklisch.

    (b) Q ist ein Normalteiler von G.

    (c) P operiert auf Q durch
    $$P \times Q \to Q, \ (g, h) \mapsto ghg^{-1}$$

    (d) Führt man auf $Q \times P$ die Multiplikation
    $$(g, h)(g', h') := (g(hg'h^{-1}), hh')$$
    ein, so ist die Abbildung
    $$Q \times P \to G, \ (g, h) \mapsto gh$$
    ein Gruppenisomorphismus.

    (In dieser Situation sagt man, die Gruppe G sei das semidirekte Produkt von P und Q.) (4)

22. Man zeige, daß jede nichtabelsche Gruppe der Ordnung 8 isomorph zur Diedergruppe $\mathcal{D}_4$ oder zur Quaternionengruppe Q_8 ist. (Hinweis: Zeigen Sie, daß es in jedem Fall einen zyklischen Normalteiler der Ordnung 4 gibt. Unterscheiden Sie die dann die Fälle nach den Ordungen der Elemente, die nicht in dem zyklischen Normalteiler liegen.) (6)

23. Man zeige:

   (a) Keine Gruppe der Ordnung 200 ist einfach. (2)

   (b) Jede Gruppe der Ordnung 45 ist abelsch. (2)

24. Sei G eine endliche Gruppe und P eine p-Sylowgruppe von G.

   (a) Man zeige: Ist $H < G$ eine Untergruppe mit $N_G(P) \subset H$, so ist $H = N_G(H)$. (3)

   (b) Man zeige: Ist H eine echte Untergruppe von P, so ist H auch eine echte Untergruppe des Normalisators $N_G(H)$. (Hinweis: Betrachte die Operation von H auf G/H.) (3)

25. Zusatzaufgabe: Sei G eine endliche Gruppe. Zeigen Sie, daß folgende Aussagen äquivalent sind:

   (a) G ist nilpotent.

   (b) Jede maximale echte Untergruppe von G ist ein Normalteiler.

   (c) Jede echte Untergruppe von G ist auch eine echte Untergruppe ihres Normalisators. (6)

Abgabe: Montag, 3.12.2001, 11.00 Uhr, Übungskasten im 1. Stock des Mathematischen Instituts. Bitte geben Sie auf Ihrer Lösung Ihre Übungsgruppe an. Die bei der Zusatzaufgabe erreichbaren Punkte sind Zusatzpunkte in dem Sinn, daß sie bei der Ermittlung der für den Schein erforderlichen Punkte nicht mitgerechnet werden.