Mathematisches Institut
der Universität München
L. Angeleri-Hügel

WS 2001/2002
Blatt 4

Algebra I

13. Für eine Gruppe G zeige man:

    (a) Die Abbildung $f : G \to G$, $x \mapsto x^2$ ist genau dann ein Homomorphismus, wenn G abelsch ist. (1)

    (b) Gilt $x^2 = e$ für alle $x \in G$, so ist die Gruppe G abelsch. (1)

    (c) Jede nicht-zyklische Gruppe der Ordnung 4 ist abelsch und isomorph zur Kleinschen Vierergruppe. (2)

14. Für eine Gruppe G zeige man:

    (a) Die Konjugation ist genau dann eine transitive Operation auf G, wenn $G = \{e\}$ ist. (1)

    (b) Für jedes $x \in G$ ist der Zentralisator $C_G(x) = \{a \in G \mid ax = xa\}$ eine Untergruppe von G. (1)

    (c) Falls G endlich ist, dann gibt es $x_1, \ldots, x_n \in G \setminus Z(G)$, so daß gilt:

    $$|G| = |Z(G)| + \sum_{i=1}^{n} [G : C_G(x_i)]$$

    (Klassengleichung) (3)

15. Sei p eine Primzahl. Man zeige:

    (a) Ist $k \geq 1$ eine natürliche Zahl und G eine Gruppe der Ordnung p^k, so gilt $p / |Z(G)|$. (2)

    (b) Jede Gruppe der Ordnung p^2 ist abelsch. (2)

16. Sei $n \geq 3$. Betrachte die Elemente

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n & 1 \end{pmatrix}$$
$$b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & n & n-1 & \dots & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

der symmetrischen Gruppe $\mathcal{S}_n$. Dann heißt $\mathcal{D}_n := \langle a, b \rangle$ die Diedergruppe vom Grad n. Man zeige:

(a) Es ist $\mathcal{D}_n = \{e, a, a^2, \dots, a^{n-1}, b, ba, ba^2, \dots, ba^{n-1}\}$, und die angegebenen Elemente sind paarweise verschieden. (2)

(b) Betrachte die reellen Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} \cos(2\pi/n) & -\sin(2\pi/n) \\ \sin(2\pi/n) & \cos(2\pi/n) \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Man beschreibe anschaulich die Wirkung dieser Matrizen auf $\mathbb{R}^2$ und zeige, daß die Gruppe $\langle A, B \rangle$ isomorph zur Diedergruppe ist. (3)

(c) Man beweise oder widerlege: Die Quaternionengruppe Q_8 aus Aufgabe 4 ist isomorph zur $\mathcal{D}_4$. (2)

Abgabe: Montag, 19.11.2001, 11.00 Uhr, Übungskasten im 1. Stock des Mathematischen Instituts. Bitte geben Sie auf Ihrer Lösung Ihre Übungsgruppe an.