Mathematisches Institut
der Universität München
L. Angeleri-Hügel

WS 2001/2002
Blatt 1

Algebra I

1. Sei G eine Gruppe. Man zeige:

   (a) Die Menge $\mathrm{Aut}(G)$ aller Automorphismen von G ist eine Untergruppe von $(S(G), \circ)$. (1)

   (b) Die Konjugation
   $$k_a : G \to G,\ b \mapsto aba^{-1}$$
   ist ein Automorphismus. Ein solcher Automorphismus heißt ein innerer Automorphismus. (1)

   (c) Die Menge $\mathrm{Inn}(G)$ aller inneren Automorphismen ist ein Normalteiler von $\mathrm{Aut}(G)$. (2)

2. (a) Seien G und G' Gruppen und e das neutrale Element von G. Man zeige, daß ein Gruppenhomomorphismus $f : G \to G'$ genau dann ein Monomorphismus ist, wenn $\mathrm{Ker}(f) = \{e\}$ gilt. (2)

   (b) Sei $f : G \to G'$ ein Gruppenepimorphismus und $H \lhd G$ ein Normalteiler. Man zeige, daß $f(H) \lhd G'$ ein Normalteiler ist. (2)

3. Sei H eine Untergruppe von G. Man gebe eine Bijektion zwischen den Linksnebenklassen $\{aH \mid a \in G\}$ und den Rechtsnebenklassen $\{Ha \mid a \in G\}$ von G modulo H an. (2)

4. (a) Für die Elemente
   $$a = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } c = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$
   der Gruppe $GL(2, \mathbb{C})$ zeige man:
   $\mathrm{ord}(a) = 4, \quad \mathrm{ord}(b) = 4, \quad \mathrm{ord}(c) = 3, \quad \mathrm{ord}(bc) = \mathrm{ord}(cb) = \infty.$
   (4)

(b) $Q_8 =< a, b >$ heißt die Quaternionengruppe. Man zeige, daß Q_8 die Ordnung 8 hat. (4)

(c) Man bestimme das Zentrum von Q_8. (2)

Abgabe: Montag, 29.10.2001, 11.00 Uhr, Übungskästen im 1. Stock des Mathematischen Instituts.