**Mathematisches Institut**
**der Universität München**
**L. Angeleri-Hügel**

**WS 2001/2002**
**Blatt 12**

# Algebra I

46. Sei $K \subset \mathbb{C}$ Zerfällungskörper von $f(X) = X^3 - 3X - 1$ über $\mathbb{Q}$.

    (a) Man zeige, daß für eine Nullstelle $\alpha$ von $f$ auch $\frac{-1}{\alpha+1}$ eine Nullstelle von $f$ ist.

    (b) Man zeige: Ist $\alpha$ eine Nullstelle von $f$ in $\mathbb{C}$, so ist $K = \mathbb{Q}(\alpha)$.

    (c) Man bestimme $[K : \mathbb{Q}]$. (4)

47. Sei $K$ ein Körper der Charakteristik $p > 0$, und sei $\alpha \in K$. Man zeige, daß das Polynom $X^p - \alpha$ genau dann reduzibel in $K[X]$ ist, wenn $\alpha$ eine $p$-te Potenz ist, also $\alpha = \beta^p$ für ein $\beta \in K$ ist. (6)

48. Entscheiden Sie, welche der folgenden Körpererweiterungen normal sind:

    (a) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$

    (b) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt{2}})$

    (c) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\zeta_n)$, wobei $\zeta_n = e^{2i\pi/n}$ (6)

49. Man zeige: Ist $K$ ein endlicher Körper, so gibt es in $K[X]$ ein nichtkonstantes Polynom ohne Nullstelle. (4)

Abgabe: Montag, 28.1.2002, 11.00 Uhr, Übungskasten im 1. Stock des Mathematischen Instituts. Bitte geben Sie auf Ihrer Lösung Ihre Übungsgruppe an.