Mathematisches Institut
der Universität München
L. Angeleri-Hügel

WS 2001/2002
Blatt 11

Algebra I

42. Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$. Man bestimme $[K : \mathbb{Q}]$ und gebe eine Basis von K über $\mathbb{Q}$ an. (4)

43. Sei $K \subset F$ eine endliche Körpererweiterung. Man zeige:
   (a) Wenn $[F : K]$ eine Primzahl ist, dann ist $K \subset F$ einfach.
   (b) Wenn $[F : K] = 2^n$ mit $n \in \mathbb{N}$, dann hat jedes Polynom $p \in K[X]$ dritten Grades, das eine Nullstelle in F besitzt, bereits eine Nullstelle in K. (6)

44. (a) Seien p und q zwei verschiedene Primzahlen und $\alpha = \sqrt{p} + \sqrt{q}$. Man zeige, daß α über $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ das Minimalpolynom
$$X^2 - 2\sqrt{p}X + (p - q)$$
besitzt.
   (b) Sei $\bar{\mathbb{Q}}$ die Menge der algebraischen Zahlen, also der algebraische Abschluß von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{C}$. Man zeige, daß jedes Element aus $\mathbb{C} \setminus \bar{\mathbb{Q}}$ transzendent über $\bar{\mathbb{Q}}$ ist. (4)

45. Sei $K \subset F$ eine Körpererweiterung, und sei $\alpha \in F$ transzendent über K. Man zeige:
   (a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist α^n transzendent über K, und es gilt:
$$[K(\alpha) : K(\alpha^n)] = n$$
   (b) Die Körpererweiterung $K \subset K(\alpha)$ besitzt unendlich viele Zwischenkörper. (6)

Abgabe: Montag, 21.1.2002, 11.00 Uhr, Übungskasten im 1. Stock des Mathematischen Instituts. Bitte geben Sie auf Ihrer Lösung Ihre Übungsgruppe an.