Mathematisches Institut
der Universität München
L. Angeleri-Hügel

WS 2001/2002
Blatt 10

Algebra I

38. (a) Man zeige, daß in $\mathbb{Q}[X]$ die Polynome

$$3X^7 + 5, \qquad \frac{1}{2}X^4 + 2X^3 + X^2 + 3,$$
$$X^3 - 5X^2 + 1 \quad \text{und} \quad X^2 - 7X + 14$$

irreduzibel sind.

(b) Mit Hilfe des Kriteriums von Eisenstein zeige man (nach einer geeigneten Substitution $X \mapsto X + a$), daß das Polynom

$$X^7 - 7X + 3$$

über $\mathbb{Q}$ irreduzibel ist. (Hinweis: Man verwende den binomischen Lehrsatz und frage sich, welche Zahlen die auftretenden Binomialkoeffizienten teilen.) (6)

39. (a) Man zeige, daß die Unterkörper $\mathbb{Q}(i)$ und $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ von $\mathbb{C}$ zwar als $\mathbb{Q}$-Vektorräume isomorph sind, nicht aber als Körper.

(b) Sei $K \subset F$ eine algebraische Körpererweiterung, und sei R ein Unterring von F mit $K \subset R \subset F$. Man zeige, daß R ein Körper ist. (4)

40. Sei L/K eine endliche Körpererweiterung. Man zeige:

(a) Für $a \in L$ ist das Minimalpolynom von a über K gleich dem Minimalpolynom des K-Vektorraumhomomorphismus

$$\varphi_a : L \to L,\ x \mapsto ax$$

(b) Gilt $L = K(a)$, so stimmt das Minimalpolynom von a über K mit dem charakteristischen Polynom von φ_a überein. (4)

41. Eine komplexe Zahl z heißt algebraisch, wenn z algebraisch über $\mathbb{Q}$ ist. z heißt eine ganze algebraische Zahl, wenn z Nullstelle eines Polynoms mit höchstem Koeffizienten 1 aus $\mathbb{Z}[X]$ ist.

   (a) Wenn u algebraisch ist, dann gibt es eine ganze Zahl $n \in \mathbb{Z}$, so daß nu eine ganze algebraische Zahl ist.

   (b) Wenn $r \in \mathbb{Q}$ ganz algebraisch ist, dann ist $r \in \mathbb{Z}$.
   (Hinweis: Schreibe $r = \frac{m}{n}$ mit teilerfremden Zahlen m und n, und führe dann die Annahme p/n zum Widerspruch.)

   (c) Ist $n \in \mathbb{Z}$ eine ganze Zahl, so sind mit u auch nu und $u + n$ ganz algebraisch. (6)

Abgabe: Montag, 14.1.2002, 11.00 Uhr, Übungskasten im 1. Stock des Mathematischen Instituts. Bitte geben Sie auf Ihrer Lösung Ihre Übungsgruppe an.