Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. B. Pareigis

SS 2003
Blatt 2

Algebra II

5. Sei G eine endliche Gruppe und U eine Untergruppe von G. Dann ist

$$\varphi : G \to S(G/U),\ g \mapsto (\bar{h} \mapsto \overline{gh})$$

ein Gruppenhomomorphismus in die Gruppe $S(G/U)$ der Bijektionen von G/U. Zeigen Sie:

   (a) $\ker(\varphi) \subset U$

   (b) Ist p der kleinste Primteiler von $|G|$ und $[G : U] = p$, so ist U ein Normalteiler von G. (4)

6. Für eine abelsche Gruppe G ist $G^* := \mathrm{Hom}(G, \mathbb{Z})$ mit der punktweisen Addition ebenfalls eine abelsche Gruppe.

   (a) Zeigen Sie: Ist G endlich erzeugt, so ist G^* endlich erzeugt frei, d. h. $G^* \cong \mathbb{Z}^m$ für ein $m \in \mathbb{N}_0$.

   (b) Sei U die von $(0, 1, 2, 3)$ und $(4, 3, 2, 1)$ erzeugte Untergruppe von $\mathbb{Z}^4$, und sei $G = \mathbb{Z}^4/U$. Geben Sie einen Isomorphismus zwischen G^* und einem geeigneten $\mathbb{Z}^m$ an.

   (c) Entscheiden Sie, ob G frei ist. (6)

7. Sei p eine ungerade Primzahl.

   (a) Man zeige, daß die Abbildung

$$\mathbb{Z}_{p^2} \to \mathbb{Z}_{p^2},\ \bar{i} \mapsto \overline{(p+1)i}$$

   die Ordnung p hat, und konstruiere so einen Homomorphismus $\varphi_1 : \mathbb{Z}_p \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_{p^2})$.

(b) Man zeige, daß die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{Z}_p)$$

die Ordnung p hat, und konstruiere so einen Homomorphismus $\varphi_2 : \mathbb{Z}_p \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_p^2)$.

(c) Seien $G_1 := \mathbb{Z}_{p^2} \rtimes \mathbb{Z}_p$ und $G_2 := \mathbb{Z}_p^2 \rtimes \mathbb{Z}_p$ die mit φ_1 bzw. φ_2 gebildeten semidirekten Produkte. Man zeige, daß das Zentrum von G_1 und G_2 zyklisch von der Ordnung p ist und gebe jeweils ein erzeugendes Element dess Zentrums an.

(d) Man entscheide, ob die Gleichung $g^p = 1$ für alle Elemente der Gruppe G_1 bzw. für alle Elemente der Gruppe G_2 gilt. (6)

8. Sei R ein Ring. Zeigen Sie, daß folgende Bedingungen äquivalent sind:

(a) Jede Menge von Linksidealen von R enthält ein maximales Element.

(b) Jede aufsteigende Kette $I_1 \subset I_2 \subset I_3 \subset \ldots$ von Linksidealen wird stationär, d. h. es gibt einen Index n mit der Eigenschaft

$$I_n = I_{n+1} = I_{n+2} = \ldots$$

(c) Jedes Linksideal von R wird von endlich vielen Elementen erzeugt.

In diesem Fall wird R linksnoethersch genannt. (4)

Abgabe: Dienstag, 21.4.2003, 11.00 Uhr, Übungskästen im 1. Stock des Mathematischen Instituts.
Bitte geben Sie auf Ihrer Lösung Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.