Mathematisches Institut **SS 2002**
der Universität München **Blatt 9**
L. Angeleri Hügel

Algebra II

34. Sei K ein Körper und G eine endliche Gruppe. Man zeige:

    (a) Ist V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über K und ist
    $$\varphi : G \to \mathrm{Aut}_K(V)$$
    eine Darstellung, so wird V vermöge $g.v = \varphi(g)(v)$ zu einem endlich erzeugten KG-Linksmodul.

    (b) Ist M ein endlich erzeugter KG-Linksmodul, so ist für jedes $g \in G$ die Abbildung $\varphi_g : M \to M,\ m \mapsto gm$ ein K-Vektorraumautomorphismus, und die Abbildung $\varphi : G \to \mathrm{Aut}_K(M),\ g \mapsto \varphi_g$ ist eine Darstellung von G in M. (4)

35. Sei R ein Ring und ${}_RM$ ein Linksmodul mit Untermoduln U, V, W.

    (a) Man beweise das modulare Gesetz: Wenn $V \subset W$ ist, dann gilt
    $$(U + V) \cap W = (U \cap W) + (V \cap W) = (U \cap W) + V$$

    (b) Man zeige, daß im allgemeinen die Inklusion
    $$(U \cap W) + (V \cap W) \subset (U + V) \cap W$$
    echt sein kann. (4)

36. Sei R ein Ring und ${}_RM$ ein Linksmodul. Man zeige:

    (a) Ein Untermodul ist genau dann maximal, wenn M/U einfach ist.

    (b) ${}_RM$ ist genau dann einfach, wenn $M = Rm$ für jedes $0 \neq m \in M$ gilt. (6)

37. Sei K ein Körper und V ein (nicht notwendig endlich-dimensionaler) K-Vektorraum. Man zeige:

    (a) Die Menge aller freien Teilmengen A von V hat ein maximales Element.

    (b) V ist ein freier K-Modul. (6)

Abgabe: Montag, 17.6.2002, 11.00 Uhr, Übungskasten im 1. Stock des Mathematischen Instituts. Bitte geben Sie auf Ihrer Lösung Ihre Übungsgruppe an.