Mathematisches Institut **SS 2002**
der Universität München **Blatt 8**
L. Angeleri Hügel

Algebra II

30. Sei
$$K_1 \xrightarrow{f_1} K_2 \xrightarrow{f_2} K_3 \xrightarrow{f_3} K_4 \xrightarrow{f_4} \ldots$$
eine Folge von Körpern und Körperhomomorphismen. Für $i \leq j$ definieren wir
$$f_{ij} := f_{j-1} \circ f_{j-2} \circ \ldots \circ f_{i+1} \circ f_i : K_i \to K_j$$
   (a) Auf der disjunkten Vereinigung $V := \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i \times \{i\}$ führen wir eine Äquivalenzrelation dadurch ein, daß wir $(x,i) \sim (y,j)$ setzen, wenn es ein k mit $k \geq i$ und $k \geq j$ gibt, so daß
   $$f_{ik}(x) = f_{jk}(y)$$
   ist. Zeigen Sie, daß auf diese Weise tatsächlich eine Äquivalenzrelation definiert wird.
   (b) Auf der Menge $K := V/\sim$ führen wir eine Addition und eine Multiplikation ein, indem wir für Äquivalenzklassen $[(x,i)]$ und $[(y,j)]$ ein k mit $k \geq i$ und $k \geq j$ wählen und
   $$[(x,i)] + [(y,j)] := [(f_{ik}(x) + f_{jk}(y), k)]$$
   $$[(x,i)] \cdot [(y,j)] := [(f_{ik}(x) \cdot f_{jk}(y), k)]$$
   Zeigen Sie, daß diese Operationen wohldefiniert sind und daß K auf diese Weise zu einem Körper wird. (K heißt der induktive Limes dieser Folge von Körpern.) (6)

31. Sei p eine Primzahl und L ein Körper der Charakteristik p.
$$K = K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset K_4 \subset \ldots$$
sei eine Folge von Unterkörpern von L mit $K_n \cong \mathbb{F}_{p^{n!}}$ und $L = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$. Man zeige:
   (a) Ist $f \in K_n[x]$ ein nicht-konstantes Polynom, so gibt es $m \in \mathbb{N}$ so daß f über K_m in Linearfaktoren zerfällt. (Hinweis: Man betrachte den Zerfällungskörper und verwende das Lemma über die Fortsetzung von Körperhomomorphismen in § 1 B).
   (b) $K \subset L$ ist ein algebraischer Abschluß. (6)

32. Sei K ein Körper der Charakteristik p, $K \subset L$ eine Körpererweiterung und $\alpha \in L \setminus K$. Ist $\alpha^p \in K$, so ist $[K(\alpha) : K] = p$ und $\mathrm{Gal}(K(\alpha)/K) = \{\mathrm{id}\}$.
(Hinweis: Man vergleiche Aufgabe 47 auf Blatt 12 im letzten Wintersemester.) (4)

33. Sei K der Körper mit 7 Elementen und L der Zerfällungskörper von $f = x^6 + 3$ über K. Man berechne $[L : K]$. (Aus dem Staatsexamen vom Frühjahr 1994). (4)

Abgabe: Montag, 10.6.2002, 11.00 Uhr, Übungskasten im 1. Stock des Mathematischen Instituts. Bitte geben Sie auf Ihrer Lösung Ihre Übungsgruppe an.