Mathematisches Institut
der Universität München
L. Angeleri Hügel

SS 2002
Blatt 7

Algebra II

26. Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik Null. Zeigen Sie die Formel von Ferrari für die Lösungen der Gleichung

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0$$

vierten Grades: Sind z_1, z_2, z_3 die Lösungen der kubischen Resolvente

$$z^3 - 2pz^2 + (p^2 - 4r)z + q^2 = 0$$

so sind die Lösungen der Gleichung vierten Grades durch die Formeln

$$x_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{-z_1} + \sqrt{-z_2} + \sqrt{-z_3}) \qquad x_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{-z_1} - \sqrt{-z_2} - \sqrt{-z_3})$$
$$x_3 = \frac{1}{2}(-\sqrt{-z_1} + \sqrt{-z_2} - \sqrt{-z_3}) \quad x_4 = \frac{1}{2}(-\sqrt{-z_1} - \sqrt{-z_2} + \sqrt{-z_3})$$

wobei die Wurzeln so zu ziehen sind, daß $\sqrt{-z_1}\sqrt{-z_2}\sqrt{-z_3} = -q$ gilt. (Hinweis: Analog zur Cardanischen Formel mache man den Ansatz $x = a + b + c$ und bestimme a, b, c so, daß

$$a^2 + b^2 + c^2 = -\frac{p}{2} \qquad abc = -\frac{q}{8}$$

gilt. Daraus leite man eine kubische Gleichung für a^2, b^2 und c^2 ab.) (6)

27. Sei p eine Primzahl, $f = x^4 - px - 1 \in \mathbb{Q}[x]$, und K der Zerfällungskörper von f über $\mathbb{Q}$.

    (a) Man zeige, daß f und die kubische Resolvente $g = x^3 + 4x + p^2$ irreduzibel über $\mathbb{Q}$ sind.

    (b) Mit Hilfe der Formel von Ferrari zeige man, daß K alle Nullstellen von g enthält.

    (c) Man zeige mit Hilfe von Aufgabe 15, daß $Gal(K/\mathbb{Q}) \cong S_4$. (6)

28. (a) Man beweise oder widerlege: Eine komplexe Zahl a ist genau dann konstruierbar, wenn $[\mathbb{Q}(a) : \mathbb{Q}]$ eine Potenz von 2 ist.

(b) Sei K der Körper der konstruierbaren komplexen Zahlen. Man zeige, daß K als Vereinigung einer aufsteigenden Kette von Galoiserweiterungen von $\mathbb{Q}$ darstellbar ist, deren Grad jeweils eine Potenz von 2 ist. (4)

29. In wie viele irreduzible Faktoren zerfällt das Kreisteilungspolynom Φ_{31} über $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$? (Aus dem Staatsexamen vom Herbst 1996) (4)

Abgabe: Montag, 3.6.2002, 11.00 Uhr, Übungskasten im 1. Stock des Mathematischen Instituts. Bitte geben Sie auf Ihrer Lösung Ihre Übungsgruppe an.