Mathematisches Institut
der Universität München
L. Angeleri Hügel

SS 2002
Blatt 6

Algebra II

22. Man zeige, wie man mit Zirkel und Lineal Winkel addieren, subtrahieren und halbieren kann und wie man Strecken in beliebig viele Teile teilen kann. (4)

23. Sei a eine Nullstelle von $f = x^4 + x + 1$ in $\mathbb{C}$. Man zeige:

    (a) $[\mathbb{Q}(a) : \mathbb{Q}] = 4$.

    (b) $\mathrm{Gal}(f/\mathbb{Q})$ enthält ein Element der Ordnung 3. Insbesondere ist $a \in \mathbb{C}$ nicht konstruierbar. (Hinweis: Mit $a = u + iv$, $(u, v \in \mathbb{R})$ liegen auch u und v im Zerfällungskörper K von f, und $4u^2$ hat über $\mathbb{Q}$ das Minimalpolynom $x^3 - 4x - 1$.) (6)

24. Sei $\mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen, die mit 1 beginnt. Die Möbiusfunktion $\mu : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ ist folgendermaßen definiert: Ist

$$n = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$$

    die Primfaktorzerlegung von n, so ist

$$\mu(n) = \begin{cases} (-1)^k & : p_1, p_2, \ldots, p_k \text{ sind alle verschieden} \\ 0 & : p_1, p_2, \ldots, p_k \text{ sind nicht alle verschieden} \end{cases}$$

    Zeigen Sie:

    (a) Die Möbiusfunktion ist multiplikativ, d. h. wir haben $\mu(1) = 1$ und

$$\mu(mn) = \mu(m)\mu(n)$$

    wenn m und n teilerfremd sind.

    (b) Ist A eine abelsche Gruppe und sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Folgen von Elementen aus A mit der Eigenschaft, daß

$$b_n = \sum_{\substack{m=1 \\ m/n}}^{n} a_m$$

ist, so gilt

$$a_n = \sum_{\substack{m=1 \\ m/n}}^{n} \mu(n/m) b_m$$

(4)

25. Sei Φ_n das n-te Kreisteilungspolynom über $\mathbb{Q}$ und μ die Möbiusfunktion. Leiten Sie folgende Formeln her:

    (a) $\Phi_n(t) = \prod_{m/n} (t^m - 1)^{\mu(n/m)}$

    (b) Sei $n = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{e_k}$ die Primfaktorzerlegung von $n \in \mathbb{N}$, wobei $p_1, p_2, \ldots, p_k$ verschieden sind. Setze $m := p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$. Zeigen Sie, daß

    $$\Phi_n(t) = \Phi_m(t^{n/m})$$

    (c) Der konstante Term des Kreisteilungspolynoms ist

    $$\Phi_n(0) = \begin{cases} -1 & : n = 1 \\ 1 & : n \neq 1 \end{cases}$$

(6)

Abgabe: Montag, 27.5.2002, 11.00 Uhr, Übungskasten im 1. Stock des Mathematischen Instituts. Bitte geben Sie auf Ihrer Lösung Ihre Übungsgruppe an.