Mathematisches Institut
der Universität München
L. Angeleri Hügel

SS 2002
Blatt 5

Algebra II

18. Man bestimme die Galoisgruppen der folgenden Polynome:

    (a) $x^3 + 3x^2 - 1 \in \mathbb{Q}[x]$

    (b) $x^4 - x^2 - 3 \in \mathbb{F}_5[x]$ (4)

19. Man entscheide, ob die Gleichungen

    (a) $x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 3 = 0$

    (b) $x^7 - 8x^5 - 4x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 2 = 0$

    über $\mathbb{Q}$ durch Radikale auflösbar sind.
    (Hinweis: Suchen Sie für die erste Gleichung eine geeignete Substitution. Verwenden Sie für die zweite Gleichung ohne Beweis die Vorzeichenregel von Descartes: Schreibt man die nichtverschwindenden reellen Koeffizienten eines Polynoms nacheinander auf und zählt, wie oft von einem Koeffizienten zum nächsten das Vorzeichen wechselt, so ist die Zahl dieser Vorzeichenwechsel eine obere Schranke für die Anzahl der positiven reellen Nullstellen des Polynoms. Was kann man daraus für die negativen Nullstellen gewinnen?) (6)

20. Sei $p \geq 3$ eine Primzahl und $\mathbb{Q} \subset K$ eine Galoiserweiterung vom Grad p. Man zeige: Obwohl $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ zyklisch ist, ist $\mathbb{Q} \subset K$ keine Radikalerweiterung. (Hinweis: Bei jeder Radikalerweiterung kann man die Exponenten n_i als Primzahlen annehmen.) (4)

21. Man beweise oder widerlege:

    (a) Sei $\mathrm{char}(K) = 0$, $p \geq 3$ eine Primzahl und $K \subset L$ eine Galoiserweiterung. Genau dann ist $\mathrm{Gal}(L/K)$ eine p-Gruppe, wenn es eine Erweiterung $L \subset E$ gibt und Zwischenkörper

    $$K = L_0 \subset L_1 \subset \ldots \subset L_m = E$$

    mit $L_i = L_{i-1}(a_i)$, ${a_i}^p \in L_{i-1}$ für alle i.

(b) Sei $f \in K[x]$ ein irreduzibles, separables Polynom vom Grad n, so daß $G = \mathrm{Gal}(f/K)$ abelsch ist. Dann folgt $|G| = n$. (6)

Abgabe: Mittwoch, 22.5.2002, 11.00 Uhr, Übungskasten im 1. Stock des Mathematischen Instituts. Bitte geben Sie auf Ihrer Lösung Ihre Übungsgruppe an.