Mathematisches Institut
der Universität München
L. Angeleri Hügel

SS 2002
Blatt 4

Algebra II

14. Sei $p(x) \in K[x]$ ein separables irreduzibles Polynom und $x_1, \ldots, x_n$ seine Nullstellen in seinem Zerfällungskörper L. Wir definieren die Größe

$$\delta := \prod_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} (x_i - x_j)$$

Wir fassen die Galoisgruppe G von L über K als Untergruppe der Gruppe S_n der Permutationen der Nullstellen auf. Insbesondere kann man jedem Element der Galoisgruppe dann ein Vorzeichen zuordnen. Zeigen Sie:

(a) Für alle $\sigma \in G$ gilt: $\sigma(\delta) = \epsilon(\sigma)\delta$

(b) $\Delta := \delta^2$, die sog. Diskriminante des Polynoms, liegt in K.

(c) Die Galoisgruppe ist genau dann in der alternierenden Gruppe enthalten, wenn $\delta \in K$ ist. (4)

15. Sei $p(x) \in K[x]$ ein separables irreduzibles Polynom vom Grad 3 mit Zerfällungskörper L. Die Größe Δ sei wie in der vorhergehenden Aufgabe definiert. Zeigen Sie, daß folgende Aussagen äquivalent sind:

(a) $[L : K] = 3$

(b) $\mathrm{Gal}(L/K) \cong A_3$

(c) Δ ist als Quadrat eines Elementes in K darstellbar.

Zeigen Sie weiter, daß, sofern diese Aussagen nicht erfüllt sind, der Grad $[L : K] = 6$ und die Galoisgruppe isomorph zur S_3 ist. (4)

16. Sei $f(x) = x^3 + px + q \in K[x]$ ein separables irreduzibles Polynom vom Grad 3. Man zeige, daß die Diskriminante durch

$$\Delta = -4p^3 - 27q^2$$

gegeben ist. (6)

17. Leiten Sie die Cardanische Formel für die Gleichung dritten Grades her: Die Nullstellen des Polynoms

$$x^3 + px + q = 0$$

über einem algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik Null sind gegeben durch

$$a + b \qquad \xi a + \xi^2 b \qquad \xi^2 a + \xi b$$

wobei ξ eine primitive dritte Einheitswurzel ist und

$$a = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \qquad b = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Dabei sind die dritten Wurzeln, für die es ja drei Definitionsmöglichkeiten gibt, so zu wählen, daß $ab = -\frac{p}{3}$ ist.
(Hinweis: Man mache den Ansatz $x = a + b$. Setzt man diesen Ansatz in die Gleichung ein, so erhält man als eine hinreichende Bedingung die Gleichungen

$$3ab = -p \qquad a^3 + b^3 = -q$$

Man bestimme dann a^3 und b^3 aus p und q mit Hilfe der Gleichung

$$(y - a^3)(y - b^3) = 0$$

als quadratische Gleichung für a^3 und b^3.) (6)

Abgabe: Montag, 13.5.2002, 11.00 Uhr, Übungskasten im 1. Stock des Mathematischen Instituts. Bitte geben Sie auf Ihrer Lösung Ihre Übungsgruppe an.