Mathematisches Institut **SS 2002**
der Universität München **Blatt 3**
L. Angeleri Hügel

Algebra II

10. (a) Sei K der Zerfällungskörper von f über $\mathbb{Q}$. Man bestimme $[K : \mathbb{Q}]$ in den folgenden Fällen:

$$f = X^4 - 1, \quad f = X^4 + 1, \quad f = X^4 + 2, \quad f = X^4 + 4$$

(b) Man bestimme die Galoisgruppe und alle Zwischenkörper von $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}_{12}$. (4)

11. Sei $K \subset \mathbb{C}$ der Zerfällungskörper von $f = X^4 - 2$ über $\mathbb{Q}$. Man zeige:

(a) $K = \mathbb{Q}(i, \sqrt[4]{2}) \quad ; \quad [K : \mathbb{Q}] = 8$.

(b) $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}(i)) \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \quad ; \quad \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

(c) $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ ist isomorph zur Diedergruppe $\mathcal{D}_4$. (6)

12. (a) Man zeige für jede natürliche Zahl $n \geq 2$: Genau dann ist $f = X^{n-1} + X^{n-2} + \ldots + X + 1 \in \mathbb{Z}[X]$ irreduzibel, wenn n eine Primzahl ist.

(b) Wieviele maximale Ideale besitzt der Ring $R = \mathbb{Q}[X]\,/(X^{4323} - 1)$? (4)

13. Sei K ein endlicher Körper mit d Elementen, und $\mathrm{char}(K)$ sei kein Teiler von n. Man zeige:

(a) $[K_n : K] = \mathrm{ord}(\bar{d})$ in der Gruppe $(\mathbb{Z}/(n))^*$.

(b) Genau dann ist $\Phi_n \in K[X]$ irreduzibel, wenn $\bar{d}$ ein erzeugendes Element der Gruppe $(\mathbb{Z}/(n))^*$ ist.

(c) Das Polynom $f = X^4 - X^2 + 1 \in \mathbb{Z}[X]$ ist irreduzibel, aber modulo aller Primzahlen p reduzibel.
(Hinweis: Für $p \geq 5$ verwende man (b).) (6)

Abgabe: Montag, 6.5.2002, 11.00 Uhr, Übungskasten im 1. Stock des Mathematischen Instituts. Bitte geben Sie auf Ihrer Lösung Ihre Übungsgruppe an.

Die Klausur findet am Montag, dem **8. Juli** 2002, 16-18 Uhr, im Hörsaal E04 statt.