Mathematisches Institut
der Universität München
L. Angeleri Hügel

SS 2002
Blatt 1

Algebra II

1. (a) Sei K ein Körper der Charakteristik $\neq 2$. Zeigen Sie, daß jede Körpererweiterung $K \subset F$ vom Grad 2 galoissch ist.

   (b) Sei $K \subset F$ eine Galoiserweiterung und sei p eine Primzahl mit $p/[F : K]$. Zeigen Sie, daß es einen Zwischenkörper $K \subset L \subset F$ mit $[F : L] = p$ gibt. (4)

2. (a) Sei K ein Körper, G eine Untergruppe von $\mathrm{Aut}(K)$, $F = \mathrm{Fix}_K(G)$ und $a \in K$. Man zeige: Genau dann ist a algebraisch über F, wenn die Bahn $\{\sigma(a) \mid \sigma \in G\}$ endlich ist.

   (b) Sei $F \subset K$ eine Galoiserweiterung, $F \subset L \subset K$ ein Zwischenkörper, $G = \mathrm{Gal}(K/F)$ und $H = \mathrm{Gal}(K/L)$.
   Man zeige: $L' = \mathrm{Fix}_K(N_G(H))$ ist der kleinste Körper zwischen F und L, so daß L/L' galoissch ist. (6)

3. Seien $a = \sqrt[3]{7}$, $b = \dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ und $K = \mathbb{Q}(a, b)$. Dann zeige man:

   (a) $[K : \mathbb{Q}] = 6$

   (b) $\mathrm{Aut}(K)$ besitzt sechs verschiedene Elemente, darunter eines, das a auf a und b auf b^2 abbildet, ein anderes, das a auf ba und b auf b abbildet.

   (c) Geben Sie sämtliche Unterkörper von K an und kennzeichnen Sie diejenigen, die über $\mathbb{Q}$ galoissch sind. (6)

4. (a) Sei K der Zerfällungskörper von $X^3 - 7$ über $\mathbb{Q}$. Man bestimme ein primitives Element von K über $\mathbb{Q}$ und gebe sein Minimalpolynom über $\mathbb{Q}$ an.

   (b) Man zeige für den Körper $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{5})$, daß $[K : \mathbb{Q}] = 6$ ist, und bestimme ein primitives Element von K über $\mathbb{Q}$. (4)

5. Zusatzaufgabe:
Sei $K \subset F$ eine einfache und algebraische Körpererweiterung mit dem primitiven Element x. Sei $f \in K[X]$ das Minimalpolynom von x, $\mathcal{L}$ die Menge der Zwischenkörper $K \subset L \subset F$ und $\mathcal{T}$ die Menge der Teiler von f in dem Polynomring $F[X]$. Wir definieren eine Abbildung

$$\varphi : \mathcal{L} \to \mathcal{T}$$

indem wir einem Zwischenkörper L das Minimalpolynom von x über L zuordnen, und eine Abbildung

$$\psi : \mathcal{T} \to \mathcal{L}$$

indem wir einem Polynom

$$p(X) = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n$$

den Körper $K(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ zuordnen, der von den Koeffizienten des Polynoms erzeugt wird. Zeigen Sie, daß die Komposition $\psi \circ \varphi$ die Identität ist, und schließen Sie daraus, daß $K \subset F$ nur endlich viele Zwischenkörper besitzt. (Hinweis: Ein irreduzibles Polynom bleibt beim Übergang zu einem kleineren Körper irreduzibel.) (6)

Abgabe: Montag, 22.4.2002, 11.00 Uhr, Übungskasten im 1. Stock des Mathematischen Instituts. Bitte geben Sie auf Ihrer Lösung Ihre Übungsgruppe an.