Mathematisches Institut
der Universität München
L. Angeleri Hügel

SS 2002
Blatt 13

Algebra II

50. Sei R ein Ring, M ein R-Modul endlicher Länge und U ein Untermodul von M. Man zeige, daß es eine Kompositionsreihe der Form

$$0 = M_0 \subset M_1 \ldots \subset M_k = U \subset M_{k+1} \subset \ldots \subset M_n = M$$

gibt und daß $l(M) = l(U) + l(M/U)$ gilt. (4)

51. Sei p eine Primzahl,

$$\mathbb{Q}_p := \{\frac{a}{p^i} \mid a \in \mathbb{Z}, i \in \mathbb{N}\}$$

und ${}_{\mathbb{Z}}M = \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}$. Man zeige:

(a) Für $m_i = \frac{1}{p^i} + \mathbb{Z}$, $i \in \mathbb{N}$ bilden die Untermoduln $M_i = \mathbb{Z}m_i$ eine echt aufsteigende Kette

$$M_1 \subset M_2 \subset M_3 \subset \ldots$$

(b) Für $i \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{Z}$ gilt: M_i wird genau dann vom Element $\frac{a}{p^i} + \mathbb{Z}$ erzeugt, wenn a und p teilerfremd sind.

(c) Für jeden nichttrivialen Untermodul U von M gibt es ein $i \in \mathbb{N}$ mit $U = M_i$.

(d) M ist artinsch, aber nicht noethersch. (6)

52. Betrachte den Unterring

$$R = \{\begin{pmatrix} q & r_1 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix} \mid q \in \mathbb{Q}, r_1, r_2 \in \mathbb{R}\}$$

von $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Setze

$$a := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad b := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Man zeige:

(a) R ist rechtsartinsch:

$$0 \subset aR \subset aR + bR \subset R$$

ist eine Kompositionsreihe von R_R.

(b) R ist nicht linksnoethersch: Sei $\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ eine Menge reeller Zahlen, die über $\mathbb{Q}$ linear unabhängig sind, und sei $a_i := \begin{pmatrix} 0 & x_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Dann ist

$$Ra_1 \subset Ra_1 + Ra_2 \subset Ra_1 + Ra_2 + Ra_3 \subset \ldots$$

eine echt aufsteigende Kette von Linksidealen von R. (6)

53. Bestimmen Sie die Länge folgender Moduln:

(a) ${}_RR$, wobei R der Ring der oberen 3×3-Dreiecksmatrizen aus Aufgabe 43 ist.

(b) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ als Modul über $\mathbb{Z}$. (4)

Abgabe: Montag, 15.7.2002, 11.00 Uhr, Übungskasten im 1. Stock des Mathematischen Instituts. Bitte geben Sie auf Ihrer Lösung Ihre Übungsgruppe an.