Mathematisches Institut
der Universität München
L. Angeleri Hügel

SS 2002
Blatt 12

Algebra II

46. Man bestimme das Jacobson-Radikal für die folgenden Ringe:

    (a) Für den Ring der Dreiecksmatrizen $\begin{pmatrix} K & K & K \\ 0 & K & K \\ 0 & 0 & K \end{pmatrix}$ aus Aufgabe 43.

    (b) Für $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ mit $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$.

(4)

47. Sei R ein Ring und M ein R-Modul. Man zeige:

    (a) Der Untermodul $S := \bigcap\{U \subset M \mid U \text{ groß in } M\}$ ist halbeinfach.

    (b) $S = \sum\{U \subset M \mid U \text{ einfach}\}$

    (c) Man gebe einen Ring R mit $Soc(R_R) \neq Soc({}_RR)$ an. (6)

    (Hinweis zu Teil (a): Zu einem gegebenen Untermodul von S konstruiere man einen weiteren Untermodul, der maximal ist mit der Eigenschaft, S trivial zu schneiden. Anschließend zeige man, daß die Summe von S und diesem Untermodul groß ist.)

48. Sei R ein Ring, M und N R-Moduln und $f \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$. Man zeige:

    (a) $f(Rad(M)) \subset Rad(N)$

    (b) $f(Rad(M)) = Rad(N)$, falls f ein Epimorphismus mit kleinem Kern ist.

    (c) Es ist $Rad(M/Rad(M)) = 0$, und jeder Untermodul $U \subset M$ mit $Rad(M/U) = 0$ enthält $Rad(M)$. (4)

49. Sei p eine Primzahl, G eine endliche p-Gruppe und K ein Körper der Charakteristik p. Man zeige:

    (a) Sei $* : G \times U \to U$ eine Operation von G auf einer endlichen Menge U mit $p/|U|$. Dann teilt p auch die Ordnung von

$$Inv_G(U) = \{u \in U \mid g * u = u \text{ für alle } g \in G\}$$

(b) Sei M ein KG-Linksmodul und $0 \neq m \in M$. Dann teilt p die Ordnung von $Inv_G(\mathbb{F}_p G \cdot m)$.

(c) Jeder einfache KG-Linksmodul ist isomorph zum KG-Linksmodul K mit der trivialen Operation

$$g \cdot k = k$$

für alle $k \in K$, $g \in G$.

(d) Das Jacobson-Radikal von KG ist

$$J = \sum_{g \in G} K(1-g) = \mathrm{Ker}(\varphi)$$

wobei

$$\varphi : KG \to K, \ \sum_{g \in G} \alpha_g g \mapsto \sum_{g \in G} \alpha_g$$

(6)

Abgabe: Montag, 8.7.2002, 11.00 Uhr, Übungskasten im 1. Stock des Mathematischen Instituts. Bitte geben Sie auf Ihrer Lösung Ihre Übungsgruppe an.