Mathematisches Institut
der Universität München
L. Angeleri Hügel

SS 2002
Blatt 11

Algebra II

42. Man betrachte den orientierten Graphen (oder Köcher)

$$Q \qquad \underset{1}{\bullet} \xrightarrow{\alpha} \underset{2}{\bullet} \xrightarrow{\beta} \underset{3}{\bullet}$$

und dazu die Menge aller Wege in Q

$$W = \{\alpha, \beta, \beta\alpha, e_1, e_2, e_3\}$$

wobei e_i, $i = 1, 2, 3$, jeweils den trivialen Weg im Vertex i bezeichnet. Für einen Körper K sei nun KQ der K-Vektorraum mit Basis W. Mit der Multiplikation

$$v \cdot w := \begin{cases} \beta\alpha : \text{falls } v = \beta, w = \alpha \\ v : \text{falls der Weg } v \text{ im Vertex } i \text{ beginnt und } w = e_i \\ w : \text{falls der Weg } w \text{ im Vertex } j \text{ endet und } v = e_j \\ 0 : \text{sonst} \end{cases}$$

wird KQ zu einer K-Algebra, der sogenannten Köcheralgebra zu Q. Man zeige:

(a) KQ hat eine Zerlegung in unzerlegbare Linksideale.

(b) KQ ist nicht halbeinfach.

(c) KQ ist ein unzerlegbarer Ring. (6)

43. Sei K ein Körper und

$$R := \{(\alpha_{ij}) \in K^{3\times 3} \mid \alpha_{21} = \alpha_{31} = \alpha_{32} = 0\}$$

die Menge der oberen 3×3-Dreiecksmatrizen über K. Man zeige, daß R isomorph zur Köcheralgebra KQ aus Aufgabe 42 ist. (4)

44. Sei G eine Gruppe der Ordnung 3 und sei $\xi \in \mathbb{C}$ eine primitive dritte Einheitswurzel.

(a) Zerlege $\mathbb{Q}[\xi]G$ in Blöcke.

(b) Zerlege $\mathbb{Q}G$ in Blöcke.

(Hinweis: Der erste Teil ist einfacher als der zweite; für den zweiten kann man den ersten benutzen.) (6)

45. Seien R_i, $i \in I$, von Null verschiedene Ringe. Man zeige: Der Ring $R = \prod_{i \in I} R_i$ (mit komponentenweiser Addition und Multiplikation) ist genau dann halbeinfach, wenn alle R_i halbeinfach sind und I endlich ist. (4)

Abgabe: Montag, 8.7.2002, 11.00 Uhr, Übungskasten im 1. Stock des Mathematischen Instituts. Bitte geben Sie auf Ihrer Lösung Ihre Übungsgruppe an.