Mathematisches Institut
der Universität München
L. Angeleri Hügel

SS 2002
Blatt 10

Algebra II

38. Sei R ein Ring und $_RM$ ein Modul.

   (a) Ist $f_1, \ldots, f_n$ ein vollständiges System orthogonaler Idempotente von $\mathrm{End}(M)$, so ist $M = \bigoplus_{i=1}^n Im(f_i)$.

   (b) Sind M_i, $i \in I$, R-Linksmoduln mit $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$, so ist M genau dann projektiv, wenn alle M_i projektiv sind. (4)

39. Man zeige für den $\mathbb{Z}$-Modul

$$M = \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid a_n \in \mathbb{Z} \text{ für alle } n\}$$

   (a) M enthält die abzählbare Teilmenge $\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$, ist aber selbst nicht abzählbar.

   (b) Ist $f \in Hom_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Z})$ eine Abbildung mit $f(\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}) = 0$, so gilt $f = 0$.

   (c) $_{\mathbb{Z}}M$ ist nicht projektiv.

   (d) Die Einbettung $\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})} \to \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ ist kein zerfallender Monomorphismus. (6)

40. Man beweise folgende universelle Eigenschaft: Sei R ein Ring, M_i, $i \in I$, R-Linksmoduln mit $M = \prod_{i\in I} M_i$. Für jedes $k \in I$ sei

$$p_k : M \to M_k,\ (m_i)_{i\in I} \mapsto m_k$$

die kanonische Projektion. Ist $_RN$ ein Modul mit Homomorphismen

$$f_i : N \to M_i,\ i \in I$$

so gibt es genau einen Homomorphismus $f : N \to M$, so daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "f_k"] & \\ M \arrow[rr, "p_k"'] & & M_k \end{tikzcd}$$

für jedes $k \in I$ kommutiert. Es gilt $\mathrm{Ker}(f) = \bigcap_{i\in I} \mathrm{Ker}(f_i)$. (4)

41. Sei K ein Körper, ${}_K V$ ein Vektorraum mit abzählbar unendlicher K-Basis und $R = \mathrm{End}_K(V)$ der Endomorphismenring. Man zeige: Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es eine Zerlegung

$$R = A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots \oplus A_n$$

wobei die A_i zu ${}_R R$ isomorphe Linksideale sind. (6)

Literatur zur Modultheorie

1. F. W. Anderson/K. R. Fuller: Rings and categories of modules, Grad. Texts Math., Vol. 13, Springer, Berlin, 1974
2. F. Kasch: Moduln und Ringe, Math. Leitfäden, Teubner, Stuttgart, 1977
3. T. Y. Lam: A first course in noncommutative rings, Grad. Texts Math., Vol. 131, Springer, Berlin, 1991
4. T. Y. Lam: Lectures on modules and rings, Grad. Texts Math., Vol. 189, Springer, Berlin, 1998
5. R. Wisbauer: Grundlagen der Modul- und Ringtheorie, Verlag Reinhard Fischer, München, 1988

Abgabe: Montag, 24.6.2002, 11.00 Uhr, Übungskasten im 1. Stock des Mathematischen Instituts. Bitte geben Sie auf Ihrer Lösung Ihre Übungsgruppe an.