Übungsblatt 3

25.05.2016

---

11. Sei $f := \mathbb{1}_{\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}$. Berechne $\hat{f}$, $f * f$, und $\widehat{f * f}$.

12. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} -1 & x < 0, \\ 1 & x \geq 0. \end{cases}$$

Für $c > 0$ sei $f_c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f_c(x) := e^{-c|x|} f(x)$. Zeige:

(a) $u_{f_c} \to u_f$ in $\mathcal{S}'$, für $c \to 0$.

(b) $F(u_f) = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\mathcal{P}(\frac{1}{\xi})$.

13. Der Vektorraum der *Funktionen schwachen Wachstums* ist definiert durch

$$\mathcal{O}_M := \left\{ \psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n);\ \forall\, \alpha \in \mathbb{N}_0^n\, \exists\, m_\alpha \in \mathbb{N}_0 : \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|)^{-m_\alpha} \left|\partial^\alpha \psi(x)\right| < \infty \right\}.$$

Zeige: Für $\psi \in \mathcal{O}_M$ und $\varphi \in \mathcal{S}$ ist $\psi\varphi$ in $\mathcal{S}$, und die Abbildung $\mathcal{S} \ni \varphi \mapsto \psi\varphi \in \mathcal{S}$ ist stetig.

14. Sei $u \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)'$, $\psi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$\psi(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} u\big([x \mapsto e^{-i\xi \cdot x}]\big).$$

Zeige:

(a) $\psi \in \mathcal{O}_M$.

(b) $F(u)$ wird durch die Funktion ψ erzeugt.

Hinweis: Nutze Abwandlung von Satz 8.6 für Distributionen mit kompaktem Träger und Testfunktionen aus $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$.

15. Sei P ein Polynom auf $\mathbb{R}^n$ vom Grad $m \geq 2$. Sei $f \in C^m\big((0,\infty) \times \mathbb{R}^n\big)$, und f, $\partial_t f$ seien stetig fortsetzbar auf $[0,\infty) \times \mathbb{R}^n$. Es gelte

$$\partial_t^2 f(t,x) - P(\partial_x) f(t,x) = 0 \quad (t > 0, x \in \mathbb{R}^n).$$

Sei

$$F(t,x) := \begin{cases} f(t,x) & \text{für } t \geq 0, x \in \mathbb{R}^n, \\ 0 & \text{für } t < 0, x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Zeige: Für die von F erzeugte reguläre Distribution $u_F \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ gilt

$$\big(\partial_t^2 - P(\partial_x)\big) u_F = \delta_0' \otimes u_{f_0} + \delta_0 \otimes u_{f_1},$$

wobei $f_0 := f(0,\cdot)$, $f_1 := \partial_t f(0,\cdot)$.