# Übungsblatt 2
## 04.05.2016

---

**6.** Sei $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := e^{1/x}$. Zeige, dass es keine Distribution $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R})'$ gibt, so dass $u|_{\mathcal{D}(0,\infty)} = u_f$.

Hinweis: Gegenteil annehmen, $\varphi \in \mathcal{D}(0,\infty)$ wählen, $\varphi_n := \varphi(n\cdot)$ ($n \in \mathbb{N}$) definieren, und dann das Verhalten von $(u(\varphi_n))$ beobachten und geeignete Schlüsse ziehen.

**7.** Seien $f, g \in \mathcal{L}_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Es gebe eine $\lambda^{n-1}$-Nullmenge $N \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$, so dass für alle $\hat{x} := (x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus N$ die Funktion $f(\cdot, \hat{x})$ stetig differenzierbar ist, mit $\partial_1 f(\cdot, \hat{x}) = g(\cdot, \hat{x})$. Zeige, dass dann $\partial_1 u_f = u_g$.

**8.** Sei $n \in \mathbb{N}$, $E_n \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ definiert durch

$$E_n(x) := \begin{cases} \frac{1}{(2-n)\sigma_{n-1}} \left|x\right|^{2-n}, & n \neq 2, \\ \frac{1}{2\pi} \ln \left|x\right|, & n = 2, \end{cases}$$

wobei $\sigma_{n-1} = n\omega_n = n\frac{\pi^{n/2}}{(n/2)!}$ das Volumen der Einheitssphäre $\{x \in \mathbb{R}^n;\ |x| = 1\}$ in $\mathbb{R}^n$ ist, $\Delta_n := \sum_{j=1}^n \partial_j^2$ der Laplace-Operator. Zeige, dass

$$\Delta_n u_{E_n} = \delta_0.$$

**9.** Sei $g \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, $f(x) := \int_0^x g(t)\,dt$ ($x \in \mathbb{R}$). Zeige, dass $\partial f = g$ im Distributionen-Sinn.

**10.** Sei $-\infty \leq a < b \leq \infty$.

(a) Sei $\varphi \in \mathcal{D}(a,b)$. Zeige: Es existiert $\Phi \in \mathcal{D}(a,b)$ mit $\partial\Phi = \varphi$ genau dann, wenn $\int_a^b \varphi = 0$.

(b) $u \in \mathcal{D}(a,b)'$, $\partial u = 0$. Zeige: Es gibt $c \in \mathbb{K}$, so dass $u = u_{c\mathbb{1}_{(a,b)}}$.