Messbare Funktionen

Valentin Herrmann

January 12, 2026

1 Grundlegendes

Definition 1 (Quasiordnung)**.** Eine Quasiordnung ist eine reflexive und transitive Relation. Eine quasigeordnete Menge ist ein Paar $I = (\underline{I}, \prec_I)$ mit Menge $\underline{I}$ und Quasiordnung $\prec_I$ auf I. Wir schreiben weiter $\hom(I, I')$ für die Menge der monotonen Funktionen von I zu I'.

Definition 2 (Gerichtete Menge)**.** Eine quasigeordnete Menge I heißt gerichtet, falls $\underline{I}$ nicht leer ist und eine Schrankenfunktion $\mathrm{ub}_I \in \hom(I \times I, I)$ existiert, sodass $x, y \in \underline{I}$, $x \prec_I \mathrm{ub}_I(x, y)$ und $y \prec_I \mathrm{ub}_I(x, y)$.

Definition 3 (Halbordnung)**.** Eine Halbordnung ist eine reflexive, antisymmetrische und transitive Relation.

Definition 4 (Halbverband)**.** Ein Halbverband ist ein Setoid X zusammen mit einer Setoidfunktion

$$X \times X \to X,\ (x, y) \mapsto x \vee y,$$

Join, sodass

$$x \vee (y \vee z) =_X (x \vee y) \vee z, \qquad (y \vee x) =_X x \vee y \qquad x \vee x =_X x$$

für alle $x, y, z \in \underline{X}$. Wir definieren weiter die kanonische Halbordnung auf X durch

$$x \leq_X y \Leftrightarrow x \vee y =_X y.$$

Definition 5 (Uniformer Raum)**.** Eine uniforme Struktur auf einem Setoid $X = (\underline{X}, =_X)$ ist ein Tripel bestehend aus einer gerichteten quasigeordneten Menge $I_x = (\underline{I}_X, \preccurlyeq_{I_X})$, einer Funktion $\rho_X \in \hom(I_X, I_x)$ und einer Relation $\Vdash_X$ zwischen $\underline{X} \times \underline{X}$ und $\underline{I}_X$ sodass

1. $\forall_{x,y \in \underline{X}} (x =_X y \Leftrightarrow \forall_{a \in I_X} (x, y) \Vdash_X a)$,
2. $\forall_{a \in \underline{I}_X} \forall_{x,y,x',y' \in \underline{X}} x =_X x' \Rightarrow y =_X y' \Rightarrow (x, y) \Vdash_X a \Rightarrow (x', y') \Vdash_X a$,
3. $\forall_{a \in \underline{I}_X} \forall_{x,y \in \underline{X}} (x, y) \Vdash_X a \Rightarrow (y, x) \Vdash_X a$,
4. $\forall_{a,b \in \underline{I}_X} \forall_{x,y \in \underline{X}} a \preccurlyeq_{I_X} b \Rightarrow (x, y) \Vdash_X b \Rightarrow (x, y) \Vdash_X a$,
5. $\forall_{a \in \underline{I}_X} \forall_{x,y,z \in \underline{X}} (x, y) \Vdash_X \rho_X(a) \Rightarrow (y, z) \Vdash_X \rho_X(a) \Rightarrow (x, z) \Vdash_X a$.

Ein Uniformer Raum ist ein Setoid mit zugehöriger uniformer Struktur.

Definition 6 (Netz)**.** Sei X ein Setoid und J ein gerichte quasigeordnete Menge. Dann nennen wir eine Funktion $x : j \mapsto x_j$, $\underline{J} \to \underline{X}$ ein Netz von J in X und notieren es als $(x_j)_{j \in \underline{J}}$. Wir schreiben weiter $\underline{X}^{\underline{J}}$ für die Menge der Netze auf X von J.

Definition 7 (Konvergenz von Netzen)**.** Sei X ein uniformer Raum. Dann konvergiert ein Netz $(x_j)_{j \in \underline{J}} \in \underline{X}^J$ zu einem Element $x \in \underline{X}$ falls ein Modul $\beta \in \hom(I_x, J)$ existiert, sodass für alle $a \in \underline{I}_X$ und $j \in \underline{J}$ mit $\beta(a) \preccurlyeq_{I_J} j$

$$(x_j, x) \Vdash_X a$$

gilt. Wir schreiben dann weiter $(x_j)_{j \in \underline{J}} \to x$ und nennen x den Grenzwert von $(x_j)_{j \in \underline{J}}$.

Definition 8 (Cauchynetz)**.** Ein Netz $(x_j)_{j \in \underline{J}} \in \underline{X}^J$ ist ein Cauchynetz in X, falls ein Modul $\alpha \in \hom(I_X, J)$ existiert, sodass

$$\forall_{a \in \underline{I}_X} \forall_{j, j' \in \underline{J}} \alpha(a) \preccurlyeq_{I_J} j, j' \Rightarrow (x_j, x_{j'}) \Vdash_X a$$

gilt.

Theorem 1 (Vervollständigung)**.** *Für jeden uniformen Raum X existiert ein uniformer Unterraum bzw. Untersetoid $\tilde{X}$, die sogenannte Vervollständigung von X, als auch eine uniform stetige Setoidenfunktion $\eta_X : X \to \tilde{X}$. Dabei konvergiert jedes Cauchynetz in $\tilde{X}$ und $\eta_{\tilde{X}}$ ist ein uniformer Isomorphismus.*

Definition 9 (Vollständiger uniformer Raum)**.** Ein uniformer Raum X ist vollständig, falls $\eta_X : X \to \tilde{X}$ ein uniformer Isomorphismus ist.

Definition 10 (Uniforme Stetigkeit)**.** Eine Funktion $\overline{X} \to \overline{Y}$ zwischen uniformen Räumen ist uniform stetig, falls ein Modul $\gamma \in \hom(I_Y, I_x)$ existiert, sodass

$$\forall_{b \in \underline{I}_Y} \forall_{x, y \in \underline{X}} (x, y) \Vdash_X \gamma(b) \Rightarrow (f(x), f(y)) \Vdash_Y b.$$

Lemma 1. *Jede uniform stetige Funktion ist eine Setoidfunktion.*

Definition 11 (Lokale uniforme Stetigkeit)**.** Eine Funktion $f : \underline{X} \to \underline{Y}$ zwischen Uniformen Räumen X, Y heißt lokal uniform stetig, falls eine Funktion $z \mapsto \gamma_z$, $\underline{\tilde{X}} \to \hom(I_Y, I_X)$ existiert, sodass aus

$$(z, \eta_X(x)) \Vdash_{\tilde{X}} \gamma_z(b) \qquad\qquad (z, \eta_X(y)) \Vdash_{\tilde{X}} \gamma_z(b)$$

die Aussage $(f(x), f(y)) \Vdash_Y b$ für alle $b \in \underline{I}_Y$, $z \in \underline{\tilde{X}}$ sowie $x, y \in \underline{X}$ folgt.

Lemma 2. *Uniform stetige Funktionen sind lokal uniform stetig.*

Theorem 2. *Seien X, Y uniforme Räume. Dann existiert zu jeder uniform stetigen (bzw. lokal uniform stetigen) Funktion $f : X \to Y$ eine eindeutige uniform stetige (bzw. lokal uniform stetige) Funktion $\tilde{f} : \tilde{X} \to \tilde{Y}$, sodass $\tilde{f} \circ \eta_X \sim \eta_Y \circ f$.*

2 Topologische Vektorräume und Verbände

2.1 Relle Zahlen

Proposition 1 (Uniforme Struktur auf $\mathbb{Q}$)**.** *Seien $\rho_{\mathbb{Q}} : \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ und $\Vdash_{\mathbb{Q}} : (\underline{\mathbb{Q}} \times \underline{\mathbb{Q}}) \times \mathbb{N}$ definiert durch*

$$\rho_{\mathbb{Q}}(n) = n + 1,$$
$$(p, q) \Vdash_{\mathbb{Q}} n \Leftrightarrow |p - q| \leq_{\mathbb{Q}} 2^{-n}.$$

Dann ist $(\mathbb{N}, \rho_{\mathbb{Q}}, \Vdash_{\mathbb{Q}})$ *eine uniforme Struktur auf dem Setoid* $\mathbb{Q}$*, sodass die Addition* $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$*, die Negation* $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ *und das Maximum* $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ *uniform stetig sind und sodass die Multiplikation* $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ *lokal uniform stetig ist.*

Definition 12 (Die reellen Zahlen)**.** The uniforme Raum $\mathbb{R}$ the reellen Zahlen ist die Vervollständigung $\tilde{\mathbb{Q}}$ des uniformen Raums $\mathbb{Q}$.

2.2 Topologische Vektorräume

Definition 13 (Vektorraum)**.** Ein Vektorraum (über $\mathbb{R}$) ist ein Setoid $X = (\underline{X}, =_X)$ zusammen mit Setoidfunktionen

- Addition $X \times X \to X$, $(x, y) \mapsto x + y$,
- Negation $X \to X$, $x \mapsto -x$,
- Skalarmultiplikation $\mathbb{R} \times X \to X$, $(s, x) \mapsto sx$,

sowie zusammen mit dem Nullelement $0 \in X$. Dabei soll $(\overline{X}, +, -, 0)$ eine abelsche Gruppe definieren und die Skalarmultiplikation so gewählt sein, sodass $\mathbb{R} \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(X, X)$ einen Ringhomomorphismus definiert. Es müssen also die Gleichungen

$$\begin{aligned} (x+y)+z &=_X x+(y+z), & x+y &=_X y+x, \\ x+0 &=_X x, & x+(-x) &=_X 0, \\ s(x+y) &=_X sx+sy, & (s+t)x &=_X sx+tx, \\ s(tx) &=_X (st)x, & 1x &=_X x \end{aligned}$$

für alle $x, y, z \in \underline{X}$ und $s, t \in \mathbb{R}$ gelten.

Example 1. *Sei* $\underline{F}[0,1]$ *die Menge der Setoidfunktionen* $[0,1] \to \mathbb{R}$*. Dann können wir den Setoiden* $(F[0,1], \sim)$ *definieren und eine Vektorraumstruktur durch Aktion im Zielraum definieren,*

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= f(x)+g(x), & (-f)(x) &= -f(x) \\ (sf)(x) &= sf(x), & 0(x) &= 0 \end{aligned}$$

für $f, g \in \underline{F}[0,1]$*,* $s \in \mathbb{R}$ *und* $x \in [0,1]$*.*

Definition 14 (Lineare Funktion)**.** Eine lineare Funktion $f : X \to Y$ zwischen Vektorräumen X, Y ist eine Setoidfunktion, sodass

$$f(x+y) =_Y f(x) + f(y) \qquad f(sx) =_Y sf(x)$$

für alle $x, y \in \underline{X}$ und $s \in \mathbb{R}$ gilt.

Definition 15 (Lineares Funktional)**.** Ein lineares Funktional auf einem Vektorraum X ist eine lineare Funktion von Art $X \to \mathbb{R}$.

Definition 16 (Topologischer Vektorraum)**.** Ein topologischer Vektorraum ist ein Vektorraum X zusammen mit uniformer Struktur $(I_X, \rho_X, \Vdash_X)$, sodass

1. die Addition $+ : X \times X \to X$ uniform stetig ist,

2. eine Funktion $\xi^X : \underline{I}_X \times \underline{X} \to \mathbb{N}$ existiert, sodass für jedes $a \in \underline{I}_X$

$$(0, sx) \Vdash_X a$$

für alle $x \in \underline{X}$ und $s \in \underline{\mathbb{R}}$ mit $|s| \leq_{\mathbb{R}} 2^{-\xi^X(a,x)}$,

3. für jedes $a \in \underline{I}_X$

$$(0, x) \Vdash_X a \Rightarrow (0, sx) \Vdash_X a$$

für alle $x \in \underline{X}$ und $s \in \underline{\mathbb{R}}$ mit $|s| \leq_{\mathbb{R}} 1$.

Lemma 3. *Ist X ein topologischer Vektorraum, so sind auch das Inverse uniform stetig und die Skalarmultiplikation ist lokal uniform stetig.*

Theorem 3 (Vervollständigung von topologischen Vektorräumen)**.** *Die Vervollständigung eines topologischen Vektorraums ist auch ein topologischer Vektorraum.*

Definition 17 (Vektorverband)**.** Ein Vektorverband ist ein Vektorraum X sodass X ein Halbverband ist, und weiter

1. $(x + z) \vee (y + z) =_X (x \vee y) + z$
2. $0 \leq_{\mathbb{R}} s \Rightarrow s(x \vee y) =_X (sx) \vee (sy)$

für alle $x, y, z \in \underline{X}$ und $s \in \underline{\mathbb{R}}$.

Example 2. *Auch hierfür ist $\underline{F}[0, 1]$ ein Beispiel zusammen mit punktweisem Maximum $f \vee g = \max_{\mathbb{R}} \circ (f, g)$. Weiter können wir auch gewisse Teilmengen von $\underline{F}[0, 1]$ betrachten, beispielsweise $\underline{C}[0, 1]$, die Menge der uniform stetigen Funktionen $[0, 1] \to \mathbb{R}$.*

Lemma 4. *Sei X ein Vektorverband. Dann*

1. *falls $x \leq_X y$, so $x + z \leq_X y + z$,*
2. *falls $x \leq_X y$ und $0 \leq_{\mathbb{R}} s$, so $sx \leq_X sy$*

für alle $x, y, z \in \underline{X}$ und $s \in \underline{\mathbb{R}}$.

Proposition 2 (Vektorverbände sind Verbände)**.** *Sei X ein Vektorverband und $(x, y) \mapsto x \wedge y$ definiert durch*

$$x \wedge y =_X -(-x \vee -y)$$

für alle $x, y \in \underline{X}$. Dann ist $\wedge$ assoziativ, kommutativ und weiter

$$x \wedge x =_X x, \quad x \vee (x \wedge y) =_X x \quad x \wedge (x \vee y) =_X x$$

für alle $x, y, z \in \underline{X}$. Des Weiteren $x \leq_X y \Leftrightarrow x \wedge y =_X x$ und $x \wedge y$ ist der größte untere Bund von $\{x, y\}$ für $x, y \in \underline{X}$.

Lemma 5. *Sei X ein Vektorverband. Dann gilt*

1. *$x + y =_X x \vee y + x \wedge y$,*
2. *$(x + z) \wedge (y + z) =_X (x \wedge y) + z$,*
3. *falls $0 \leq_{\mathbb{R}} s$, so $s(x \wedge y) =_X sx \wedge sy$*

für alle $x, y, z \in \underline{X}$ und $s \in \underline{\mathbb{R}}$.

Proposition 3 (Vektorverbände sind distributiv)**.** *Jeder Vektorverband X ist ein distributiver Verband, d.h.*

1. $x \vee (y \wedge z) =_X (x \vee y) \wedge (x \vee z)$,
2. $x \wedge (y \vee z) =_X (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

für alle $x, y, z \in \underline{X}$.

Definition 18 (Positiver Kegel)**.** Sei X ein Vektorverband. Dann nennen wir die Teilmenge

$$\underline{C}_X = \{x \in \underline{X} \mid 0 \leq_X x\}$$

den positiven Kegel von X.

Definition 19 (Positives lineares Funktional)**.** Wir nennen weiter ein lineares Funktional f auf X positiv, falls $\forall_{x \in \underline{C}_X} 0 \leq_{\mathbb{R}} f(x)$.

Remark 1. $C_X = (\underline{C}_X, \leq_X)$ mit $\mathrm{ub}_{C_x} = \vee \in \hom(\underline{C}_X \times \underline{C}_X, \underline{C}_X)$ ist eine gerichtete quasigeordnete Menge.

Example 3. *Sei $R : \underline{C}[0,1] \to \mathbb{R}$ eine Funktion definiert durch*

$$R(f, \gamma) = \int f$$

wobei $\int$ das Riemannintegral ist. Dann ist R bekanntlich ein positives lineares Funktional.

Lemma 6. *Jedes positive lineare Funktional ist monoton.*

Proof. Seien $x, y \in \underline{X}$ mit $x \leq_X y$ gegeben. Dann ist

$$0 =_X x + (-x) \leq_X y + (-x)$$

also auch

$$f(x) =_{\mathbb{R}} f(x) + f(0) \leq_{\mathbb{R}} f(x) + f(y + (-x)) = f(x) + f(y) - f(x) = f(y).$$

$\square$

Definition 20 ($(-x)^+$, $(-x)^-$, $|-|$ und kegeldisjsunkte Werte)**.** Sei X ein Vektorverband. Wir definieren $(-)^+ : X \to X$, $(-)^- : X \to X$ sowie $|-| : X \to X$ durch

$$x^+ = x \vee 0, \qquad x^- = (-x) \vee 0, \qquad |x| = x \vee (-x).$$

Wir nennen weiter Werte $x, y \in \underline{X}$ kegeldisjunkt, falls $|x| \wedge |y| =_X = 0$.

Lemma 7 (Eigenschaften von $(-x)^+$, $(-x)^-$, $|-|$ und Kegeldisjunktheit)**.** *Sei X ein Vektorverband. Dann gilt*

1. $x =_X x^+ - x^-$,
2. *x^+ und x^- sind kegeldisjunkt,*
3. *für jedes Paar an kegeldisjunkten Elementen $u, v \in \underline{C}_X$, folgt $u =_X x^+$ und $v =_X x^-$ aus $x =_X u - v$,*

4. $|-x| =_X |x| = x^+ + x^- \in \underline{C}_X$,
5. *für alle* $s \in \underline{\mathbb{R}}$ *mit* $0 \leq_{\mathbb{R}} s$ *gilt* $(sx)^+ =_X sx^+$, $(sx)^- =_X sx^-$ *und* $|sx| =_X s|x|$,
6. x *und* y *sind kegeldisjunkt genau dann wenn* $|x| \vee |y| =_X |x| + |y|$,
7. *sind* x *und* y *kegeldisjunkt, so folgt* $(x+y)^+ = x^+ + y^+$, $(x+y)^- = x^- + y^-$ *und* $|x+y| =_X |x| + |y|$

für alle $x, y, z \in \underline{X}$.

Lemma 8 (Weitere eigenschaften von $|-|$)**.** *Sei* X *ein Vektorverband. Dann gilt*

1. $|x+y| \leq_X |x| + |y|$,
2. $|sx| \leq_X |s||x|$,
3. $|x \vee z - y \vee z| \leq_X |x-y|$,
4. $|x \wedge z - y \wedge z| \leq_X |x-y|$,
5. $(|x| + |y|) \wedge u \leq_X |x| \wedge u + |y| \wedge u$,
6. $|sx| \wedge u \leq_X (|s|+1)(|x| \wedge u)$,
7. $|x \wedge |y| - x \wedge |z|| \leq_X |y-z| \wedge |x|$

für alle $x, y, z \in \underline{X}$, $s \in \underline{\mathbb{R}}$ *und* $u \in \underline{C}_X$.

Definition 21 (Topologischer Vektorverband)**.** Ein topologischer Vektorverband ist ein Vektorverband X mit uniformer Struktur $(I_X, \rho_X, \Vdash_X)$ sodass

1. X ein topologischer Vektorraum ist,
2. $\vee : X \times X \to X$ uniform stetig ist,
3. für alle $a \in \underline{I}_X$ und $x, y \in \underline{C}_X$ mit $x \leq_X y$

$$(0, y) \Vdash_X a \Rightarrow (0, x) \Vdash_X a.$$

Theorem 4. *Die Vervollständigung eines topologischen Vektorverbands* X *ist wieder ein topologischer Vektorverband. Insbesondere ist* $\eta_X : X \to \tilde{X}$ *vertauschbar mit den Operationen eines topologischen Vektorverbandes.*

3 Integrationstheorie

Definition 22 (Abstrakter Integrationsraum)**.** Ein abstrakter Integrationsraum ist ein Vektorverband X zusammen mit einem positiven linearen Funktional E auf X.

Sei im folgenden ein abstrakter Integrationsraum (X, E) fest gewählt.

3.1 Integrierbare Funktionen

Lemma 9. *Das Paar* $L = (\underline{X}, =_L)$ *mit*

$$x =_L y \Leftrightarrow \forall_{n\in\mathbb{N}} E(|x-y|) \leq_{\mathbb{R}} 2^{-n}$$

ist ein Setoid.

Proof. Reflexivität und Symmetrie sind Trivial. Zur Transitivität: Seien $x =_L y$ und $y =_L z$ sowie $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Dann ist $E(|x-y|), E(|y-z|) \leq_{\mathbb{R}} 2^{-n-1}$ und daher

$$E(|x-z|) \leq E(|x-y| + |y-z|) \leq 2^{-n-1} + 2^{-n-1} = 2^{-n},$$

wobei wir die Positivität von E benutzen. □

Proposition 4 (Uniforme Struktur L)**.** *Das Tupel* $(\mathbb{N}, \rho_L, \Vdash_L)$ *mit*

$$\begin{aligned} \rho_L(n) &= n+1, \\ (x,y) \Vdash_L n &\Leftrightarrow E(|x-y|) \leq_{\mathbb{R}} 2^{-n} \end{aligned}$$

ist eine uniforme Struktur auf L*.*

Proof.

1. Zu zeigen ist $x =_L y \Leftrightarrow \forall_{n\in\mathbb{N}} (x,y) \Vdash_L n$. Dies folgt direkt durch Entfalten der Definitionen.
2. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $x, y, x', y' \in \underline{X}$, sodass $x =_L x'$, $y =_L y'$ und $(x,y) \Vdash_L n$. Dann folgt für alle $m \in \mathbb{N}$
$$\begin{aligned} E(|x'-y'|) &\leq E(|x'-x|) + E(|x-y|) + E(|y-y'|) \\ &\leq 2^{-m-1} + 2^{-n} + 2^{-m-1} \\ &\leq 2^{-m} + 2^{-n}. \end{aligned}$$
Also gilt $(x', y') \Vdash_L n$.
3. Zu zeigen ist $(x,y) \Vdash_L n \Leftrightarrow (y,x) \Vdash_L n$. Dies folgt direkt aus $|x-y| = |y-x|$.
4. Seien $n, m \in \mathbb{N}$ und $x, y \in \underline{X}$ mit $n \leq m$ und $(x,y) \Vdash_L m$. Dann folgt
$$E(|x-y|) \leq 2^{-m} \leq 2^{-n},$$
also $(x,y) \Vdash_L n$.
5. Seien $n \in \mathbb{N}$ und $x, y, z \in \underline{X}$, sowie $(x,y), (y,z) \Vdash_L n+1$. Dann folgt
$$E(|x-z|) \leq E(|x-y|) + E(|y-z|) \leq 2^{-n-1} + 2^{-n-1} = 2^{n},$$
also $(x,z) \Vdash_L n$.

□

Proposition 5. *Die kanonische Funktion* $\pi_L : X \to L$ *ist eine Setoidfunktion.*

Proof. Sei $x =_X y$. Dann ist $x - y =_X x - x =_X 0$ und daher $\forall_{n\in\mathbb{N}} (x,y) \Vdash_L n$, also $x =_L y$. □

Proposition 6. L *ist ein topologischer Vektorverband.*

Proof. Für die Halbverbandstruktur und Vektorraumstruktur auf L übernehmen wir die von X gegebene. Dabei nützen wir aus, dass π_L eine Setoidfunktion ist, d.h. die Gleichungen in der Definition des Vektorraums für X gelten auch in L. Gleiches gilt für die definierenden Gleichungen eines Vektorverbands. Wir müssen weiter zeigen, dass L ein topologischer Vektorraum ist:

1. Die Addition $+ : L \times L \to L$ ist uniform stetig: Wir wählen den Modulus $\gamma^+(n) = (n+1, n+1)$. Ist nun
$$((x,y),(x',y')) \Vdash_{L\times L} \gamma^+(n)$$
gegeben, so gilt $(x,x') \Vdash_L n+1$ und $(y,y') \Vdash_L n+1$. Damit folgt
$$\begin{aligned} E(|(x+y)-(x'+y')|) &\leq E(|(x-x')+(y-y')|) \\ &\leq E(|x-x'|)+E(|(y-y')|) \\ &\leq 2^{-n} \end{aligned}$$

2. Sei $e : \mathbb{R} \to \mathbb{N}$ so definiert sodass $2^{-e(r)}r \leq 1$ ($\mathbb{R}$ ist archimedisch), dann können wir $\xi^L(n,x) = n + e(E(|x|))$ definieren. Sind nun $n \in \mathbb{N}$ sowie $x \in \underline{X}$, $s \in \underline{\mathbb{R}}$ mit $|s| \leq_{\mathbb{R}} 2^{-\xi^L(n,x)}$ gegeben, so folgt
$$E(|sx|) = |s|E(|x|) \leq 2^{-n-e(E(|x|))}E(|x|) \leq 2^{-n},$$
also $(0, sx) \Vdash_L n$.

3. Sei $(0,x) \Vdash_X n$. Zu zeigen ist $(0,sx) \Vdash_L n$ für $|s| \leq_{\mathbb{R}} 1$. Trivial.

Damit verbleibt nur zu zeigen, dass L ein topologischer Vektorverband ist.

1. $\vee : L \times L \to L$ ist uniform stetig: Wir wählen den Modulus $\gamma^\vee(n) = (n+1, n+1)$. Sei wieder
$$((x,y),(x',y')) \Vdash_{L\times L} \gamma^\vee(n)$$
gegeben, so gilt $(x,x') \Vdash_L n+1$ und $(y,y') \Vdash_L n+1$. Damit folgt
$$\begin{aligned} E(|(x\vee y)-(x'\vee y')|) &= E(|(x\vee y - x'\vee y)+(x'\vee y - x'\vee y')|) \\ &\leq E(|x\vee y - x'\vee y|)+E(|x'\vee y - x'\vee y'|) \\ &\leq E(|x-x'|)+E(|y-\vee y'|) \\ &\leq 2^{-n} \end{aligned}$$

2. Sei $n \in \mathbb{N}$ gegeben zusammen mit $0 \leq_L x, y$, $x \leq_L y$ und $(0,y) \Vdash_L n$. Zu zeigen ist $(0,x) \Vdash_L n$:
$$\begin{aligned} E(|x|) &= E(x) \\ &= E(y) - E(y-x) \\ &\leq E(y) \\ &\leq 2^{-n} \end{aligned}$$

$\square$

Wir schreiben $\mathcal{L}$ für die Vervollständigung $\tilde{L}$ des topologischen Vektorverbands L und nennen die Elemente von $\mathcal{L}$ integrierbare Funktionen über dem abstrakten Integrationsraum (X, E).

Proposition 7. *Es existiert eine uniform stetige Funktion $\int : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ sodass*

1. $\int \eta_L(x) =_{\mathbb{R}} E(x)$,
2. $\int (f+g) =_{\mathbb{R}} \int f + \int g$,
3. $\int (sf) =_{\mathbb{R}} s \int f$,
4. *ist* $0 \leq_{\mathcal{L}} f$*, dann* $0 \leq_{\mathbb{R}} \int f$

für alle $x \in \underline{L}$, $f, g \in \underline{\mathcal{L}}$ und $s \in \underline{\mathbb{R}}$. Für $f \in \mathcal{L}$ nennen wir $\int f$ das Integral von f.

Proof. Wir zeigen zunächst, dass $E : L \to \mathbb{R}$ uniform stetig ist: Sei $(x, y) \Vdash_L n$. Dann

$$|E(x) - E(y)| \leq E(|x-y|) \leq 2^{-n}$$

und daher $(E(x), E(y)) \Vdash_{\mathbb{R}} n$ $(E(x) - E(y), E(y) - E(x) \leq E(|x-y|)$, da $x - y, y - x \leq |x-y|)$. Also ist $E : L \to \mathbb{R}$ uniform stetig womit ein $\tilde{E} : \mathcal{L} \to \tilde{\mathbb{R}}$ mit $\eta_{\mathbb{R}} \circ E = \tilde{E} \circ \eta_L$ existiert. Da $\mathbb{R}$ vollständig ist, ist $\eta_{\mathbb{R}}$ ein Isomorphismus und ein $\varepsilon_{\mathbb{R}}$ mit $\varepsilon_{\mathbb{R}} \circ \eta_{\mathbb{R}} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ existiert. Wir definieren $\int = \varepsilon_{\mathbb{R}} \circ \tilde{E}$. Dann gilt direkt

$$\int \eta_L(x) = \varepsilon_{\mathbb{R}}(\tilde{E}(\eta_L(x))) = E(x).$$

Linearität folgt für Werte $\eta_L(x)$, $x \in \underline{L}$ unmittelbar. Da die Erweiterung auf die Vervollständigungen eindeutig ist, folgt Linearität auch allgemein, vgl. bspw. $\int (sf)$ mit $s \int f$.

Sei zuletzt $f = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{L}$ mit $0 \leq_{\mathcal{L}} f$. Da $(-)^+$ uniform stetig ist und da $(\eta_L(x_n))_n \to f$, erhalten wir

$$\eta_L(x_n^+) =_{\mathcal{L}} \eta_L(x_n)^+ \to f^+ =_{\mathcal{L}} f.$$

Wegen uniformer Stetigkeit von $\int$ erhalten wir also

$$0 \leq E(x_n^+) = \int \eta_L(x_n^+)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Insbesondere erhalten wir also $0 \leq_{\mathbb{R}} \int f$. $\square$

Proposition 8. *Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine steigende Folge an integrierbaren Funktionen, also $\forall_{n \in \mathbb{N}} f_n \leq_{\mathcal{L}} f_{n+1}$. Ist $(\int f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent in $\mathbb{R}$, so konvergiert $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{L}$.*

Proof. Da $(\int f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent in $\mathbb{R}$, ist $(\int f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge mit einem Modul $\alpha \in \hom(\mathbb{N}, \mathbb{N})$. Gegeben ein $n \in \mathbb{N}$, betrachte $m, m' \in \mathbb{N}$ sodass $\alpha(\rho^2_{\mathcal{L}}(n) + 1) \leq m \leq m'$. Wir werden nun zeigen, dass $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge mit Modul $\alpha(\rho^2_{\mathcal{L}}(n) + 1)$ ist. Da $\int f_m \leq \int f_{m'}$ wegen $f_m \leq f_{m'}$, folgt nun $\int f_{m'} - \int f_m \leq 2^{-(\rho_{\mathcal{L}}(n)+1)}$. Sei $f_m = (x_{n'})_{n' \in \mathbb{N}}$ und $f_{m'} = (y_{n'})_{n' \in \mathbb{N}}$. Dann gilt $\eta_L(x_{n'}) \to f_m$, $\eta_L(y_{n'}) \to f_{m'}$. Da $\vee : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ uniform stetig ist, folgt weiter

$$\eta_L(x_{n'} \vee y_{n'}) =_{\mathcal{L}} \eta_L(x_{n'}) \vee \eta_L(y_{n'}) \to f_m \vee f_{m'} =_{\mathcal{L}} f_{m'}.$$

Also folgt $E(x_{n'}) =_{\mathbb{R}} \int \eta_L(x_{n'}) \to \int f_m$ sowie $E(x_{n'} \vee y_{n'}) =_{\mathbb{R}} \int \eta_L(x_{n'} \vee y_{n'}) \to \int f_{m'}$. Wählen wir nun $n' \in \mathbb{N}$ sodass

$$
\begin{aligned}
&(f_m, \eta_L(x_{n'})) \Vdash_{\mathcal{L}} \rho^2_{\mathcal{L}}(n), && (f_{m'}, \eta_L(x_{n'} \vee y_{n'})) \Vdash_{\mathcal{L}} \rho_{\mathcal{L}}(n), \\
&\left| E(x_{n'}) - \int f_m \right| \leq 2^{-\rho^2_{\mathcal{L}}(n)-2}, && \left| E(x_{n'} \vee y_{n'}) - \int f_{m'} \right| \leq 2^{-\rho^2_{\mathcal{L}}(n)-2}.
\end{aligned}
$$

Wir erhalten dann

$$
\begin{aligned}
&E(|x_{n'} \vee y_{n'} - x_{n'}|) \\
&= E(x_{n'} \vee y_{n'} - x_{n'}) \\
&= E(x_{n'} \vee y_{n'}) - E(x_{n'}) \\
&= \left(E(x_{n'} \vee y_{n'}) - \int f_{m'} \right) + \left(\int f_{m'} - \int f_m \right) + \left(\int f_m - E(x_{n'}) \right) \\
&\leq \left| E(x_{n'} \vee y_{n'}) - \int f_{m'} \right| + \left(\int f_{m'} - \int f_m \right) + \left| \int f_m - E(x_{n'}) \right| \\
&\leq 2^{-\rho^2_{\mathcal{L}}(n)-2} + 2^{-\rho^2_{\mathcal{L}}(n)-1} + 2^{-\rho^2_{\mathcal{L}}(n)-2} \\
&\leq 2^{-\rho^2_{\mathcal{L}}(n)}.
\end{aligned}
$$

Also gilt $(x_{n'} \vee y_{n'}, x_{n'}) \Vdash_L \rho^2_{\mathcal{L}}(n)$ und daher auch $(\eta_L(x_{n'} \vee y_{n'}), \eta_L(x_{n'})) \Vdash_L \rho^2_{\mathcal{L}}(n)$. Wir erhalten zusammen mit $(f_m, \eta_L(x_{n'})) \Vdash_{\mathcal{L}} \rho^2_{\mathcal{L}}(n)$ und $(f_{m'}, \eta_L(x_{n'} \vee y_{n'})) \Vdash_{\mathcal{L}} \rho_{\mathcal{L}}(n)$ also $(f_m, f_{m'}) \Vdash_{\mathcal{L}} n$. Also ist $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge mit Modul $\alpha(\rho^2_{\mathcal{L}}(n) + 1)$ und konvergiert daher in $\mathcal{L}$.

□

3.2 Messbare Funktionen

Ähnlich zu den integrierbaren Funktionen $\mathcal{L}$ konstruieren wir nun die messbaren Funktionen $\mathcal{M}$ auf dem abstrakten Integrationsraum (X, E).

Lemma 10. *Das Paar $M = (\underline{X}, =_M)$ mit*

$$x =_M y \Leftrightarrow \forall_{n \in \mathbb{N}} \forall_{u \in \underline{C}_X} E(|x - y| \wedge u) \leq_{\mathbb{R}} 2^{-n}$$

ist ein Setoid.

Proof. Vgl. oben. □

Proposition 9 (Uniforme Struktur M)**.** *Das Tupel $(\mathbb{N}, \rho_M, \Vdash_M)$ mit*

$$
\begin{aligned}
\rho_M((u, n)) &= (u, n + 1), \\
(x, y) \Vdash_M (u, n) &\Leftrightarrow E(|x - y| \wedge u) \leq_{\mathbb{R}} 2^{-n}
\end{aligned}
$$

ist eine uniforme Struktur auf M.

Proof. Vgl. oben. □

Proposition 10. *M ist ein topologischer Vektorverband.*

Proof. Vgl. oben. □

3.3 Konvergenztheoreme

Lemma 11. *Die Funktion $\iota_L : L \to M$, $\iota_L(x) = x$, ist eine uniform stetige Setoidinjektion.*

Proof. Wir zeigen zunächst uniforme Stetigkeit. Wir wählen den Modul $\gamma((u,n)) = n$. Ist nun $(x,y) \Vdash_L \gamma((u,n))$, so folgt

$$E(|\iota_L(x) - \iota_L(y)| \wedge u) = E(|x-y| \wedge u) \leq E(|x-y|) \leq 2^{-n}.$$

Also folgt $(\iota_L(x), \iota_L(y)) \Vdash_M (u,n)$. Aus der uniformen Stetigkeit folgt nun insbesondere, dass ι_L eine Setoidfunktion ist.

Nun zur Injektivität. Sei $\iota_L(x) =_M \iota_L(y)$ für $x, y \in \underline{L}$. Wir haben dann

$$E(|x-y|) = E(|x-y| \wedge |x-y|) \leq 2^{-n}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, also $x =_L y$. Also ist ι_L injektiv. □

Proposition 11. *Es existiert eine uniform stetige Einbettung $\lambda : \mathcal{L} \to \mathcal{M}$, sodass $\eta_M \circ \iota_L = \lambda \circ \eta_L$.*

Proof. Da ι_L uniform stetig ist, können wir λ als Erweiterung von ι_L auf die Vervollständigungen definieren. Dann gilt insbesondere $\eta_M \circ \iota_L = \lambda \circ \eta_L$. Exemplarisch zeigen wir, dass λ die Addition erhält. Wir haben

$$\begin{aligned}
\lambda(\eta_L(x) + \eta_L(y)) &= \lambda(\eta_L(x+y)) \\
&= \eta_M(\iota_L(x+y)) \\
&= \eta_M(\iota_L(x)) + \eta_M(\iota_L(y)) \\
&= \lambda(\eta_L(x)) + \lambda(\eta_L(y))
\end{aligned}$$

für $x, y \in \underline{L}$. Aus der Eindeutigkeit der Erweiterung von ι_L folgt nun Gleichheit für arbiträre Elemente in $\mathcal{L}$. Zeigen wir weiter, dass λ injektiv ist. Sei $f = (x_m)_{m \in \mathbb{N}} \in \mathcal{L}$ gegeben mit $\lambda(f) =_{\mathcal{M}} \eta_M(0)$. Weiter gilt $\lambda(\eta_L(x_m)) \to \eta_M(0)$, da $\eta_L(x_m) \to f$ in $\mathcal{L}$. Für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ existiert ein $m \in \mathbb{N}$, sodass für alle $m' \geq m$ die Abschätzung

$$(\lambda(\eta_L(x_{m'})), \eta_M(0)) = (\eta_M(\iota_L(x_{m'})), \eta_M(0)) \Vdash_{\mathcal{M}} \rho_M^2((|x_{n+1}|, n+1))$$

gilt. Daraus folgt nun also $(\iota_L(x_{m'}), 0) \Vdash_{\mathcal{M}} (|x_{n+1}|, n+1)$. Wir erhalten für alle $m' \in \mathbb{N}$ mit $m, n+1 \leq m'$ wegen $(x_{m'}, x_{n+1}) \Vdash_L n+1$

$$\begin{aligned}
E(|x_{m'}|) &\leq E(|x_{m'}| \wedge |x_{m'}|) \\
&\leq E(|x_{n+1} + (x_{m'} - x_{n+1})| \wedge |x_{m'}|) \\
&\leq E((|x_{n+1}| + |x_{m'} - x_{n+1}|) \wedge |x_{m'}|) \\
&\leq E(|x_{n+1}| \wedge |x_{m'}| + |x_{m'} - x_{n+1}| \wedge |x_{m'}|) \\
&\leq E(|x_{n+1}| \wedge |x_{m'}| + |x_{m'} - x_{n+1}|) \\
&\leq E(|x_{n+1}| \wedge |x_{m'}|) + E(|x_{m'} - x_{n+1}|) \\
&\leq 2^{-n-1} + 2^{-n-1} = 2^{-n}
\end{aligned}$$

und daher $(x_{m'}, 0) \Vdash_L n$. Wir können also $f =_{\mathcal{L}} 0$ schlussfolgern. □

Proposition 12. *Für jedes $g \in \mathcal{L}$ existiert eine uniform stetige Funktion $\mu_g : \mathcal{M} \to \mathcal{L}$ sodass*

$$\mu_g(\lambda(f)) =_{\mathcal{L}} g \wedge |f|$$
$$\lambda(\mu_g(h)) =_{\mathcal{M}} \lambda(g) \wedge |h|$$

für alle $f \in \mathcal{L}$ und $h \in \mathcal{M}$.

Der Beweis funktioniert leider nicht direkt, da ein Funktionsterm aufgrund der verschiedenen Herkünfte von g und h nicht direkt aufgeschrieben werden kann. Des Weiteren funktioniert keine einfache Konstruktion über die Erweiterung einer Funktion $M \to L$, da im allgemeinen $g \in \mathcal{L}$ und nicht nur $g \in L$.

Theorem 5. *Sei f eine messbare Funktion. Existiert eine integrierbare Funktion g mit $|f| \leq_{\mathcal{M}} \lambda(g)$, so existiert eine integrierbare Funktion $f_{\mathcal{L}}$ mit $f =_{\mathcal{M}} \lambda(f_{\mathcal{L}})$.*

Proof. Angenommen $|f| \leq_{\mathcal{M}} \lambda(g)$ für ein $g \in \mathcal{L}$. Da $f^+, f^- \leq |f| \leq \lambda(g)$ folgt

$$\lambda(\mu_g(f^+)) = \lambda(g) \wedge |f^+| = \lambda(g) \wedge f^+ = f^+$$

und

$$\lambda(\mu_g(f^-)) = \lambda(g) \wedge |f^-| = \lambda(g) \wedge f^- = f^-.$$

Also können wir $f_{\mathcal{L}} = \mu_g(f^+) - \mu_g(f^-)$ setzen und erhalten

$$\lambda(f_{\mathcal{L}}) = \lambda(\mu_g(f^+)) - \lambda(\mu_g(f^-)) = f^+ - f^- = f.$$

□

Definition 23. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge an integrierbaren Funktionen und sei f eine integrierbare Funktion. Dann sagen wir

1. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert in Norm zu f, falls $f_n \to f$ in $\mathcal{L}$,
2. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert fast-überall zu f, falls $f_n \to f$ in $\mathcal{M}$.

Lemma 12. *Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine ansteigende Folge an integrierbaren Funktionen, welche fast-überall zu einer integrierbaren Funktion f konvergieren. Dann gilt $\forall_{n\in\mathbb{N}} f_n \leq_{\mathcal{L}} f$.*

Proof. Beachte, dass wir $f_n \wedge f_m = f_n$ und weiter $(f_n \wedge f_m, f_n) \Vdash_{\mathcal{L}} n$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n \leq m$ haben. Also konvergiert $(f_n \wedge f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ zu f_n. Daraus folgt

$$\lambda(f_n) \wedge \lambda(f_m) = \lambda(f_n \wedge f_m) \to \lambda(f_n)$$

in $\mathcal{M}$. Wir haben andererseits auch

$$\lambda(f_n) \wedge \lambda(f_m) \to \lambda(f_n) \wedge \lambda(f)$$

da $\lambda(f_m) \to \lambda(f)$ in $\mathcal{M}$. Also gilt $\lambda(f_n \wedge f) = \lambda(f_n) \wedge \lambda(f) = \lambda(f_n)$, weshalb $f_n \wedge f = f_n$ mit Injektivität von λ folgt. Also muss $\forall_{n\in\mathbb{N}} f_n \leq f$ gelten. □

Theorem 6 (Lebesgue's Theorem über Monotone Konvergenz)**.** *Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine ansteigende Folge von integrierbaren Funktionen. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent.*

1. *$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert fast-überall zu einer integrierbaren Funktion f,*

2. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert in Norm zu einer integrierbaren Funktion* f*,*

3. $(\int f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert, in welchem Fall*

$$\int f_n \to \int f.$$

Proof.

- (1) $\Rightarrow$ (2): Wir haben soeben gezeigt, dass $\forall_n f_n \leq f$. Wir können nun o.B.d.A. f_n und f durch $f_n - f_0$ und $f - f_0$ austauschen und können daher von nun an $\forall_{n\in\mathbb{N}} 0 \leq f_n$ sowie $0 \leq f$ annehmen. Da $\lambda(f_n) \to \lambda(f)$ in $\mathcal{M}$,

$$f_n = f \wedge f_n = f \wedge |f_n| = \mu_f(\lambda(f_n)) \to \mu_f(\lambda(f)) = f \wedge |f| = f$$

- (2) $\Rightarrow$ (3): Folgt aus Stetigkeit des Integrals.
- (3) $\Rightarrow$ (1): Angenommen $(\int f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Dann konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{L}$ zu einem $f \in \mathcal{L}$ nach früherer Proposition. Da weiter $\lambda : \mathcal{L} \to \mathcal{M}$ uniform stetig ist, folgt $\lambda(f_n) \to \lambda(f)$ in $\mathcal{M}$.

□

Theorem 7 (Fatous Lemma)**.** *Sei* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge von integrierbaren Funktionen, welche fast-überall zu einer integrierbaren Funktion* f *konvergiert, sodass* $0 \leq f_n$ *und* $\forall_{n\in\mathbb{N}} \int f_n \leq B$*. Dann gilt* $\int f \leq B$*.*

Proof. Da $\lambda(f_n) \to \lambda(f)$ in $\mathcal{M}$, gilt

$$f \wedge f_n = f \wedge |f_n| = \mu_f(\lambda(f_n)) \to \mu_f(\lambda(f)) = f \wedge |f| = f$$

in $\mathcal{L}$. Also $\int(f \wedge f_n) \to \int f$. Da $\int(f \wedge f_n) \leq \int f_n \leq B$ für alle $n \in \mathbb{N}$, folgt $\int f \leq B$. □

Lemma 13. *Sei* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge von integrierbaren Funktionen, welche fast-überall zu einer integrierbaren Funktion* f *konvergiert, und sei* g *eine integrierbare Funktion, sodass* $\forall_{n\in\mathbb{N}} |f_n| \leq g$*. Dann gilt* $|f| \leq g$*.*

Proof. Da $\lambda(f_n) \to \lambda(f)$ in $\mathcal{M}$ udn $|f_n| = g \wedge |f_n|$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

$$|f_n| = g \wedge |f_n| = \mu_g(\lambda(f_n)) \to \mu_g(\lambda(f)) = g \wedge |f|$$

in $\mathcal{L}$. Also gilt $|f| \wedge |f_n| \to |f| \wedge (g \wedge |f|) = g \wedge |f|$ in $\mathcal{L}$. Andererseits

$$|f| \wedge |f_n| = \mu_{|f|}(\lambda(f_n)) \to \mu_{|f|}(\lambda(f)) = |f| \wedge |f| = |f|$$

in $\mathcal{L}$. Also $g \wedge |f| = |f|$ und damit $|f| \leq g$. □

Theorem 8 (Lebesgues Theorem über dominierte Konvergenz)**.** *Sei* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge von integrierbaren Funktionen, welche fast-überall zu einer integrierbaren Funktion* f *konvergieren und lass* g *eine integrierbare Funktion mit* $\forall_{n\in\mathbb{N}} |f_n| \leq g$ *sein. Dann konvergiert* $|f_n|_{n\in\mathbb{N}}$ *zu* f *in Norm.*

Proof. Beachte $|f| \leq g$ nach soeben bewiesenem Lemma. Da weiter $\lambda(f_n) \to \lambda(f)$ in $\mathcal{M}$, folgt $\lambda(f_n^+) = \lambda(f_n)^+ \to \lambda(f)^+ = \lambda(f^+)$ in $\mathcal{M}$. Also

$$g \wedge f_n^+ = g \wedge |f_n^+| = \mu_g(\lambda(f_n^+)) \to \mu_g(\lambda(f^+)) = g \wedge |f^+| = g \wedge f^+$$

in $\mathcal{L}$. Da weiter $\forall_{n\in\mathbb{N}} f_n^+ \leq |f_n| \leq g$ und $f^+ \leq |f| \leq g$ folgt also

$$f_n^+ \to f^+$$

in $\mathcal{L}$. Ähnlich folgt $f_n^- \to f^-$ in $\mathcal{L}$. Also ist $f_n = f_n^+ - f_n^- \to f^+ - f^- = f$ in $\mathcal{L}$. □