Uniform Spaces

Noah Wedlich

Sunday 23rd November, 2025

1 Setoide

Wir starten mit der Einführung von Setoiden. Diese können intuitiv als Mengen verstanden werden, bei denen die Gleichheit explizit spezifiziert wird.

Definition 1.1 (Setoid)**.** Ein *Setoid* X ist ein Paar $(\underline{X}, =_X)$, wobei $\underline{X}$ eine Menge ist und $=_X$ eine Äquivalenzrelation auf $\underline{X}$, d.h. es gilt:

Reflexivität: $\forall x \in \underline{X} : x =_X x$,

Symmetrie: $\forall x, y \in \underline{X} : x =_X y \implies y =_X x$,

Transitivität: $\forall x, y, z \in \underline{X} : x =_X y \wedge y =_X z \implies x =_X z$.

Remark 1.2. Wir schreiben auch $x \neq_X y :\iff \neg(x =_X y)$.

Ist X ein Setoid, so nennen wir X

- *diskret*, falls $\forall x, y \in \underline{X} : x =_X y \vee x \neq_X y$,
- *stabil*, falls $\forall x, y \in \underline{X} : \neg(x \neq_X y) \implies x =_X y$.

Da wir die Gleichheit in Setoiden explizit angeben, müssen wir explizit angeben, ob Abbildungen zwischen Setoiden diese Gleichheiten respektieren.

Definition 1.3 (Abbildung von Setoiden)**.** Sind X, Y Setoide und ist $f : \underline{X} \to \underline{Y}$ eine Abbildung, so heißt f eine *Abbildung von Setoiden*, falls gilt:

$$\forall x, x' \in \underline{X} : x =_X x' \implies f(x) =_Y f(x').$$

In diesem Fall schreiben wir auch $f : X \to Y$.

Definition 1.4 (Identische Abbildung)**.** Sind X, Y Setoide und sind $f, g : X \to Y$ Abbildungen von Setoiden, so heißt f *identisch* mit g, geschrieben $f \sim g$, falls gilt:

$$\forall x, x' \in \underline{X} : x =_X x' \implies f(x) =_Y g(x').$$

Definition 1.5 (Spezielle Setoid-Abbildungen)**.** Sind X, Y Setoide und ist $f : X \to Y$ eine Abbildung von Setoiden, so nennen wir f

- *injektiv*, falls $\forall x, x' \in \underline{X} : f(x) =_Y f(x') \implies x =_X x'$,
- *surjektiv*, falls $\forall y \in \underline{Y} : \exists x \in \underline{X} : f(x) =_Y y$,
- *bijektiv*, falls f injektiv und surjektiv ist.

Analog zu anderen Räumen können wir auch Subsetoide definieren.

Definition 1.6 (Subsetoid)**.** Sei X ein Setoid. Ein *Subsetoid* S von X ist ein Paar $(\underline{S}, \iota_S)$, wobei $\iota_S : \underline{S} \to \underline{X}$ eine beliebige Abbildung ist. In diesem Fall ist S ein Setoid mit der Gleichheitsrelation

$$\forall s, s' \in \underline{S} : s =_S s' :\iff \iota_S(s) =_X \iota_S(s').$$

Auch kartesische Produkte von Setoiden sind wieder Setoide.

Definition 1.7. Sind X, Y Setoide, so ist das *kartesische Produkt* $X \times Y$ das Setoid mit

$$\begin{gathered} \underline{X \times Y} := \underline{X} \times \underline{Y}, \\ (x, y) =_{X \times Y} (x', y') :\iff x =_X x' \wedge y =_Y y'. \end{gathered}$$

Dann sind die Projektionen $\pi_X : X \times Y \to X$ und $\pi_Y : X \times Y \to Y$ Abbildungen von Setoiden.

Schließlich definieren wir noch einige spezielle Arten von Relationen auf Setoiden. Wir beginnen mit Trennungen, die eine Art verallgemeinerte Ungleichheit darstellen.

Definition 1.8 (Trennung)**.** Sei X ein Setoid. Eine *Trennung* $\#_X$ auf X ist eine Relation $\#_X \subseteq X \times X$, die folgende Eigenschaften erfüllt:

Irreflexivität: $\forall x, x' \in \underline{X} : x \#_X x' \implies x \neq_X x'$,

Symmetrie: $\forall x, x' \in \underline{X} : x \#_X x' \implies x' \#_X x$,

Kotransitivität: $\forall x, x', x'' \in \underline{X} : x \#_X x' \implies (x \#_X x'' \vee x' \#_X x'')$.

Eine Trennung $\#_X$ heißt *eng*, falls auch $\forall x, x' \in \underline{X} : \neg(x \#_X x') \implies x =_X x'$ gilt.

Remark 1.9. Eine Trennung ist eine Setoid-Relation auf $X \times X$, d.h. es gilt:

$$\forall x, x', y, y' \in \underline{X} : x =_X y \wedge x' =_X y' \implies (x \#_X x' \iff y \#_X y').$$

Example 1.10. Ist X ein stabiler Setoid, so ist die Relation $\neq_X$ eine enge Trennung auf X.

Wir können nun auch Abbildungen zwischen Setoiden definieren, die Trennungen respektieren.

Definition 1.11 (Stark Extensional)**.** Sind X, Y Setoide mit Trennungen $\#_X$ bzw. $\#_Y$ und ist $f : X \to Y$ eine Abbildung von Setoiden, so heißt f *stark extensional*, falls gilt:

$$\forall x, x' \in \underline{X} : f(x) \#_Y f(x') \implies x \#_X x'.$$

Außerdem können wir auch Produkttrennungen definieren.

Definition 1.12 (Produkttrennung)**.** Sind X, Y Setoide mit Trennungen $\#_X$ bzw. $\#_Y$, so ist die *Produkttrennung* $\#_{X\times Y}$ auf $X \times Y$ definiert durch:

$$(x, y)\#_{X\times Y}(x', y') :\iff (x\#_X x' \vee y\#_Y y').$$

Nun kommen wir noch zu partiellen Ordnungen und Halbverbänden auf Setoiden.

Definition 1.13 (Partielle Ordnung)**.** Sei X ein Setoid. Eine *partielle Ordnung* $\leq_X$ auf X ist eine Relation $\leq_X \subseteq X \times X$, die folgende Eigenschaften erfüllt:

Reflexivität: $\forall x, x' \in \underline{X} : x =_X x' \implies x \leq_X x'$,

Antisymmetrie: $\forall x, x' \in \underline{X} : x \leq_X x' \wedge x' \leq_X x \implies x =_X x'$,

Transitivität: $\forall x, x', x'' \in \underline{X} : x \leq_X x' \wedge x' \leq_X x'' \implies x \leq_X x''$.

Eine partielle Ordnung $\leq_X$ heißt *total*, falls auch $\forall x, x' \in \underline{X} : x \leq_X x' \vee x' \leq_X x$ gilt, und *quasi-total*, falls $\forall x, x' \in \underline{X} : \neg(x \leq_X x') \implies x' \leq_X x$ gilt.

Definition 1.14. Sei X ein Setoid mit partieller Ordnung $\leq_X$ und Trennung $\#_X$. Dann definiere die Abbildung:

$$\forall x, x' \in \underline{X} : x <_X x' :\iff x \leq_X x' \wedge x\#_X x'.$$

Definition 1.15 (Halbverband)**.** Sei X ein Setoid und sei $\vee_X : X \times X \to X$ eine Abbildung von Setoiden. Das Paar $(X, \vee_X)$ heißt *Halbverband*, falls gilt:

Kommutativität: $\forall x, x' \in \underline{X} : x \vee_X x' =_X x' \vee_X x$,

Assoziativität: $\forall x, x', x'' \in \underline{X} : (x \vee_X x') \vee_X x'' =_X x \vee_X (x' \vee_X x'')$,

Idempotenz: $\forall x \in \underline{X} : x \vee_X x =_X x$.

Ist $(X, \vee_X)$ ein Halbverband, so ist die kanonische partielle Ordnung $\leq_X$ auf X definiert durch:

$$\forall x, x' \in \underline{X} : x \leq_X x' :\iff x \vee_X x' =_X x'.$$

2 Uniforme Räume

Wir beginnen mit den grundlegenden Definitionen und Eigenschaften von uniformen Räumen.

Definition 2.1 (Uniformer Struktur)**.** Eine uniforme Struktur auf einem Setoid X ist ein Tripel $(I_X, \rho_X, \Vdash_X)$, wobei

- $I_X = (\underline{I}_X, \preccurlyeq_X)$ eine direkt gerichtete Menge ist (partielle Ordnung und obere Schranken),
- $\rho_X : \underline{I}_X \to \underline{I}_X$ eine monotone Abbildung ist, d.h. $\forall i, j \in \underline{I}_X : i \preccurlyeq_X j \implies \rho_X(i) \preccurlyeq_X \rho_X(j)$,
- $\Vdash_X$ eine Relation zwischen $\underline{X} \times \underline{X}$ und $\underline{I}_X$ ist.

Diese Daten müssen die folgenden Bedingungen erfüllen:

1. $\forall x, y \in \underline{X} : x =_X y \iff \forall i \in \underline{I}_X : (x, y) \Vdash_X i$,
2. $\forall i \in \underline{I}_X : \forall x, y \in \underline{X} : (x, y) \Vdash_X i \implies (y, x) \Vdash_X i$,
3. $\forall i \in \underline{I}_X : \forall x, y, x', y' \in \underline{X} : (x, y) =_{X \times X} (x', y') \wedge (x, y) \Vdash_X i \implies (x', y') \Vdash_X i$,
4. $\forall i, j \in \underline{I}_X : \forall x, y \in \underline{X} : i \preccurlyeq_X j \wedge (x, y) \Vdash_X j \implies (x, y) \Vdash_X i$,
5. $\forall i \in \underline{I}_X : \forall x, y, z \in \underline{X} : (x, y) \Vdash_X \rho_X(i) \wedge (y, z) \Vdash_X \rho_X(i) \implies (x, z) \Vdash_X i$.

Ein Uniformer Raum ist ein Setoid, der mit einer uniformen Struktur ausgestattet ist.

Example 2.2. Sei $\underline{X}$ eine Menge und $d : \underline{X} \times \underline{X} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine Pseudometrik auf $\underline{X}$. Definiere Gleichheit auf X durch:

$$x =_X y :\iff d(x, y) = 0.$$

Dann ist $X = (\underline{X}, =_X)$ ein Setoid. Weiterhin definiere:

$$I_X := (\mathbb{N}, \leq) \qquad \rho_X(n) := n + 1 \qquad (x, y) \Vdash_X n :\iff d(x, y) < 2^{-n}.$$

Dann ist $(X, I_X, \rho_X, \Vdash_X)$ ein uniformer Raum.

Nun zwei grundlegende Eigenschaften von uniformen Räumen.

Lemma 2.3. *Sei $(X, I_X, \rho_X, \Vdash_X)$ ein uniformer Raum. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:*

1. $\forall i \in \underline{I}_X : \forall x, y \in \underline{X} : (x, y) \Vdash_X \rho_X^n(i) \implies (x, y) \Vdash_X i$,
2. $\forall i \in \underline{I}_X : \forall x_0, x_1, \ldots, x_{n+1} \in \underline{X} : \bigwedge_{k=0}^{n} (x_k, x_{k+1}) \Vdash_X \rho_X^n(i) \implies (x_0, x_{n+1}) \Vdash_X i$.

Wir kommen nun zu Netzen, dem Analogon von Folgen in metrischen Räumen.

Definition 2.4 (Netz)**.** Sei X eine Setoid und $J = (\underline{J}, \preccurlyeq_J)$ eine direkt gerichtete Menge. Dann heißt eine Abbildung $x : \underline{J} \to \underline{X}$ ein *Netz* in X auf J. Wir schreiben oft auch $(x_j)_{j \in \underline{J}}$ für das Netz x. Netze auf $\mathbb{N}$ heißen *Folgen*. Wir schreiben $\underline{X}^J$ für die Menge aller Netze in X auf J.

Auf uniformen Räumen können wir nun auch Konvergenz von Netzen definieren.

Definition 2.5 (Konvergenz)**.** Sei $(X, I_X, \rho_X, \Vdash_X)$ ein uniformer Raum, $J = (\underline{J}, \preccurlyeq_J)$ eine direkt gerichtete Menge und $(x_j)_{j\in\underline{J}}$ ein Netz in X auf J. Dann konvergiert $(x_j)_{j\in\underline{J}}$ gegen $x \in \underline{X}$ mit monotonem Modulus $\beta : I_X \to J$, falls gilt:

$$\forall i \in \underline{I}_X : \forall j \in \underline{J} : \beta(i) \preccurlyeq_J j \implies (x_j, x) \Vdash_X i.$$

In diesem Fall schreiben wir $(x_j)_{j\in\underline{J}} \to_\beta x$ und nennen x den *Grenzwert* des Netzes.

Analog können wir auch Cauchy-Netze definieren.

Definition 2.6 (Cauchy-Netz)**.** Sei $(X, I_X, \rho_X, \Vdash_X)$ ein uniformer Raum, $J = (\underline{J}, \preccurlyeq_J)$ eine direkt gerichtete Menge und $(x_j)_{j\in\underline{J}}$ ein Netz in X auf J. Dann heißt $(x_j)_{j\in\underline{J}}$ ein *Cauchy-Netz* mit monotonem Modulus $\gamma : I_X \to J$, falls gilt:

$$\forall i \in \underline{I}_X : \forall j, j' \in \underline{J} : \gamma(i) \preccurlyeq_J j, j' \implies (x_j, x_{j'}) \Vdash_X i.$$

Remark 2.7*.* Jedes konstante Netz ist ein Cauchy-Netz.

Als nächstes zeigen wir, dass Konvergenz von Netzen in uniformen Räumen eindeutig ist.

Lemma 2.8. *Seien X, Y uniforme Räume, J eine direkt gerichtete Menge und $(x_j)_{j\in\underline{J}}, (y_j)_{j\in\underline{J}}$ Netze in X auf J. Weiterhin gelte $\forall j \in \underline{J} : x_j =_X y_j$. Außerdem seien $f, g : X \to Y$ identische Abbildungen von Setoiden. Dann gilt:*

1. $\forall x, x' \in \underline{X} : (x_j)_{j\in\underline{J}} \to_\beta x \wedge (y_j)_{j\in\underline{J}} \to_{\beta'} x' \implies x =_X x'$,
2. $\forall y, y' \in \underline{Y} : (f(x_j))_{j\in\underline{J}} \to_\delta y \wedge (g(y_j))_{j\in\underline{J}} \to_{\delta'} y' \implies y =_Y y'$.

Wir können ebenfalls zeigen, dass konvergente Netze stets Cauchy-Netze sind.

Lemma 2.9. *Sei X ein uniformer Raum, J eine direkt gerichtete Menge und $(x_j)_{j\in\underline{J}}$ ein Netz in X auf J. Falls $(x_j)_{j\in\underline{J}}$ gegen ein $x \in \underline{X}$ mit monotonem Modulus $\beta : I_X \to J$ konvergiert, so ist $(x_j)_{j\in\underline{J}}$ ein Cauchy-Netz mit monotonem Modulus $\gamma := \beta \circ \rho_X$.*

Da wir nun Konvergenz definiert haben, macht es sinn auch (uniforme) Stetigkeit zu definieren.

Definition 2.10 (Uniforme Stetigkeit)**.** Es seien X, Y uniforme Räume. Eine Abbildung von Mengen $f : \underline{X} \to \underline{Y}$ heißt *uniform stetig*, falls es eine monotone Abbildung $\gamma : I_Y \to I_X$, genannt *Modulus der uniformen Stetigkeit*, gibt, so dass gilt:

$$\forall i \in \underline{I}_Y : \forall x, x' \in \underline{X} : (x, x') \Vdash_X \gamma(i) \implies (f(x), f(x')) \Vdash_Y i.$$

Remark 2.11*.* Uniforme Stetigkeit ist stabil unter identischen Abbildungen, d.h. sind $f, g : X \to Y$ identische Abbildungen von Setoiden und ist f uniform stetig, so ist auch g uniform stetig. Außerdem ist die Komposition uniform stetiger Abbildungen wieder uniform stetig.

Definition 2.12 (Uniformer Isomorphismus)**.** Eine uniform stetige Abbildung $f : \underline{X} \to \underline{Y}$ heißt *uniformer Isomorphismus*, falls es eine uniform stetige Abbildung $g : \underline{Y} \to \underline{X}$ gibt, so dass $g \circ f \sim \mathrm{id}_X$ und $f \circ g \sim \mathrm{id}_Y$ gilt. Dann heißen X und Y *uniform äquivalent*, geschrieben $X \simeq Y$.

Uniform stetige Abbildungen sind immer auch Setoid-Abbildungen.

Lemma 2.13. *Seien X, Y uniforme Räume und sei $f : \underline{X} \to \underline{Y}$ eine uniform stetige Abbildung. Dann ist $f : X \to Y$ auch eine Abbildung von Setoiden.*

Außerdem erhalten uniform stetige Abbildungen Konvergenz und die Cauchy-Eigenschaft.

Lemma 2.14. *Seien X, Y uniforme Räume und $(x_j)_{j\in \underline{J}}$ ein Netz in X auf J. Weiterhin sei $f : \underline{X} \to \underline{Y}$ eine uniform stetige Abbildung mit Modulus $\gamma : I_Y \to I_X$. Dann gilt:*

- $\forall x \in \underline{X} : (x_j)_{j\in \underline{J}} \to_\beta x \implies (f(x_j))_{j\in \underline{J}} \to_{\beta\circ\gamma} f(x)$,
- *Ist $(x_j)_{j\in \underline{J}}$ Cauchy mit Modulus $\alpha : I_X \to J$, so ist $(f(x_j))_{j\in \underline{J}}$ Cauchy mit Modulus $\alpha \circ \gamma$.*

Analog zu Subsetoiden können wir auch Uniforme Teilräume definieren.

Definition 2.15 (Uniformer Teilraum)**.** Sei X ein uniformer Raum. Dann ist ein uniformer Raum S ein *uniformer Teilraum* von X, falls es eine injektive uniform stetige Abbildung $\iota_S : S \to X$ gibt.

Insbesondere sind Subsetoide auch uniforme Teilräume.

Proposition 2.16. *Sei X ein uniformer Raum und sei $S = (\underline{S}, \iota_S)$ ein Subsetoid von X. Definiere:*

$$(s, s') \Vdash_S i :\iff (\iota_S(s), \iota_S(s')) \Vdash_X i.$$

Dann ist $(S, I_X, \rho_X, \Vdash_S)$ ein uniformer Raum und $\iota_S : S \to X$ eine injektive uniform stetige Abbildung. In diesem Fall nennen wir S einen von $(\underline{S}, \iota_S)$ induzierten uniformen Teilraum *von X.*

Für induzierte uniforme Teilräume kann man uniforme Stetigkeit, Konvergenz und die Cauchy-Eigenschaft durch die Einbettung charakterisieren.

Lemma 2.17. *Sei X ein uniformer Raum und sei S ein von $(\underline{S}, \iota_S)$ induzierter uniformer Teilraum von X. Dann gilt für jeden uniformen Raum Z:*

1. *Ein $f : \underline{Z} \to \underline{S}$ ist uniform stetig genau dann, wenn $\iota_S \circ f : \underline{Z} \to \underline{X}$ uniform stetig ist.*

Außerdem gilt für jedes Netz $(s_j)_{j\in \underline{J}}$ in S auf einer direkt gerichteten Menge J:

2. $\forall s \in \underline{S} : (s_j)_{j\in \underline{J}} \to_\beta s \iff (\iota_S(s_j))_{j\in \underline{J}} \to_\beta \iota_S(s)$,
3. *$(s_j)_{j\in \underline{J}}$ ist Cauchy mit Modulus γ genau dann, wenn $(\iota_S(s_j))_{j\in \underline{J}}$ Cauchy mit Modulus γ ist.*

Die uniformen Strukturen von Setoiden setzen sich auch auf kartesische Produkte fort.

Proposition 2.18. *Seien X, Y uniforme Räume. Dann ist das kartesische Produkt $X \times Y$ via*

$$\begin{gathered} I_{X\times Y} := I_X \times I_Y, \\ \rho_{X\times Y}(i_X, i_Y) := (\rho_X(i_X), \rho_Y(i_Y)), \\ ((x, y), (x', y')) \Vdash_{X\times Y} (i_X, i_Y) :\iff (x, x') \Vdash_X i_X \wedge (y, y') \Vdash_Y i_Y \end{gathered}$$

ein uniformer Raum. Dann sind $\pi_X : X \times Y \to X$ und $\pi_Y : X \times Y \to Y$ uniform stetige Abbildungen.

Für das Produkt uniformer Räume gibt es auch eine universelle Eigenschaft.

Theorem 2.19. *Seien X, Y, Z uniforme Räume und seien $f : Z \to X$ und $g : Z \to Y$ uniform stetige Abbildungen. Dann gibt es eine eindeutige uniform stetige Abbildung $\langle f, g\rangle : Z \to X \times Y$, so dass das folgende Diagramm kommutiert:*

$$
\begin{tikzcd}
& X \\
Z \arrow[ur, bend left, "f"] \arrow[r, dashed, "\exists!\langle f,g\rangle"] \arrow[dr, bend right, "g"'] & X \times Y \arrow[u, "\pi_X"] \arrow[d, "\pi_Y"'] \\
& Y
\end{tikzcd}
$$

Corollary 2.20. *Sind X, Y, Z uniforme Räume und $f : Z \to X$, $g : Z \to Y$ uniform stetige Abbildungen, so ist auch $f \times g : Z \to X \times Y$, definiert durch $(f \times g)(z) := (f(z), g(z))$, eine uniform stetige Abbildung, so dass $\pi_X \circ (f \times g) \sim f \circ \pi_X$ und $\pi_Y \circ (f \times g) \sim g \circ \pi_Y$ gilt.*

Remark 2.21. Aus dem Theorem folgt insbesondere, dass für uniforme Räume X, Y, X', Y' und uniforme Isomorphismen $f : X \to X'$, $g : Y \to Y'$ auch $f \times g : X \times Y \to X' \times Y'$ ein uniformer Isomorphismus ist. Somit gilt auch $X \times Y \simeq X' \times Y'$ genau dann, wenn $X \simeq X'$ und $Y \simeq Y'$ gilt.

3 Vollständigkeit

Wir kommen nun zu der Vollständigkeit uniformer Räume. Wir wollen dabei analog zu metrischen Räumen vorgehen, d.h. die Vervollständigung soll durch Cauchy-Netze konstruiert werden. Hierfür benötigen wir zunächst eine geeignete Äquivalenzrelation auf Netzen.

Lemma 3.1. *Sei X ein uniformer Raum und J eine direkt gerichtete Menge. Dann ist die Relation*

$$(x_j)_{j\in\underline{J}} =_{X^J} (y_j)_{j\in\underline{J}} :\iff \forall i \in \underline{I}_X : \exists j \in \underline{J} : \forall j' \in \underline{J} : j \preccurlyeq_J j' \implies (x_{j'}, y_{j'}) \Vdash_X i$$

eine Äquivalenzrelation auf $\underline{X}^J$, d.h. $X^J := (\underline{X}^J, =_{X^J})$ ist ein Setoid.

Außerdem müssen wir die uniforme Struktur auf X^J erweitern.

Proposition 3.2. *Sei X ein uniformer Raum und J eine direkt gerichtete Menge. Dann ist $(X^J, I_X, \rho_X^2, \Vdash_{X^J})$ ein uniformer Raum, wobei die Relation $\Vdash_{X^J}$ definiert ist durch:*

$$
\begin{aligned}
((x_j)_{j\in\underline{J}}, (y_j)_{j\in\underline{J}}) \Vdash_{X^J} i :\iff \exists (x'_j)_{j\in\underline{J}}, (y'_j)_{j\in\underline{J}} \in \underline{X}^J : \\
(x_j)_{j\in\underline{J}} =_{X^J} (x'_j)_{j\in\underline{J}} \wedge (y_j)_{j\in\underline{J}} =_{X^J} (y'_j)_{j\in\underline{J}} \\
\wedge \exists j \in \underline{J} : \forall j' \in \underline{J} : j \preccurlyeq_J j' \implies (x'_{j'}, y'_{j'}) \Vdash_X i.
\end{aligned}
$$

Lemma 3.3. *Sei X ein uniformer Raum und J eine direkt gerichtete Menge. Dann gilt für alle Netze $(x_j)_{j\in\underline{J}}, (y_j)_{j\in\underline{J}}$ in X^J and alle $j \in \underline{I}_X$:*

1. $((x_j)_{j\in\underline{J}}, (y_j)_{j\in\underline{J}}) \Vdash_{X^J} \rho_X^2(j) \implies \exists j' \in \underline{J} : \forall j'' \in \underline{J} : j' \preccurlyeq_J j'' \implies (x_{j''}, y_{j''}) \Vdash_X j$,
2. $\exists j' \in \underline{J} : \forall j'' \in \underline{J} : j' \preccurlyeq_J j'' \implies (x_{j''}, y_{j''}) \Vdash_X j \implies ((x_j)_{j\in\underline{J}}, (y_j)_{j\in\underline{J}}) \Vdash_{X^J} j$.

Außerdem müssen wir den uniformen Raum X in X^J einbetten.

Definition 3.4 (Einbettungen)**.** Es seien X, Y setoide und J, J' direkt gerichtete Mengen. Weiterhin seien $f : \underline{X} \to \underline{Y}$ eine Abbildung und $\sigma : J' \to J$ eine monotone Abbildung. Dann definiere die Abbildungen:

- $\eta_X^J : \underline{X} \to \underline{X}^J$ durch $\eta_X^J(x) := (x)_{j \in \underline{J}}$,
- $f^J : \underline{X}^J \to \underline{Y}^J$ durch $f^J((x_j)_{j\in\underline{J}}) := (f(x_j))_{j\in\underline{J}}$,
- $\sigma_X : \underline{X}^J \to \underline{X}^{J'}$ durch $\sigma_X((x_j)_{j\in\underline{J}}) := (x_{\sigma(j')})_{j'\in\underline{J'}}$.

Wir zeigen nun einige Eigenschaften dieser Abbildungen.

Lemma 3.5. *Sei X ein uniformer Raum und J eine direkt gerichtete Menge. Dann ist $\eta_X^J : X \to X^J$ eine injektive uniform stetige Abbildung. Außerdem gilt für alle Cauchy-Netze $(x_j)_{j\in\underline{J}}$ in X^J mit Modulus $\gamma : I_X \to J$:*

$$\left(\eta_X^J(x_j)\right)_{j\in\underline{J}} \to_\gamma (x_j)_{j\in\underline{J}}.$$

Insbesondere ist X ein uniformer Teilraum von X^J.

Lemma 3.6. *Seien X, Y uniforme Räume, J eine direkt gerichtete Menge und $f : \underline{X} \to \underline{Y}$ eine uniform stetige Abbildung mit Modulus $\gamma : I_Y \to I_X$. Dann ist $f^J : \underline{X}^J \to \underline{Y}^J$ eine uniform stetige Abbildung mit Modulus $\rho_X^2 \circ \gamma : I_Y \to I_X$.*

Lemma 3.7. *Sei X ein uniformer Raum und seien J, J' direkt gerichtete Mengen. Weiterhin sei $\sigma : J' \to J$ eine monotone Abbildung. Dann ist $\sigma_X : \underline{X}^J \to \underline{X}^{J'}$ eine uniform stetige Abbildung mit Modulus $\rho_X^2 : I_X \to I_X$, genau dann, wenn $\forall j \in \underline{J} : \exists j' \in \underline{J'} : j \preccurlyeq_J \sigma(j')$ gilt.*

Proposition 3.8. *Sei X ein uniformer Raum und seien J, J' direkt gerichtete Mengen. Dann gibt es eine eindeutige (Setoid-)Bijektion $\hat{(\cdot)} : \underline{X}^{J\times J'} \to \left(\underline{X}^J\right)^{J'}$. Dann gilt*

$$\hat{(\cdot)} \circ \eta_X^{J\times J'} = \eta_{X^{J'}}^J \circ \eta_X^{J'}.$$

Außerdem ist $\hat{(\cdot)}$ uniform stetig und für alle Cauchy-Netze $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \underline{X}^{J\times J'}$ gilt:

$$\forall j \in \underline{I}_X : (\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}) \Vdash_{(X^J)^{J'}} \rho_X^8(j) \implies (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Vdash_{X^{J\times J'}} j$$

Proposition 3.9. *Es seien X, Y uniforme Räume und J eine direkt gerichtete Menge. Dann gibt es eine eindeutige (Setoid-)Bijektion $\langle\cdot,\cdot\rangle : \underline{X}^J \times \underline{Y}^J \to \underline{(X\times Y)}^J$. Dann gilt:*

$$\langle\cdot,\cdot\rangle \circ (\eta_X^J \times \eta_Y^J) = \eta_{X\times Y}^J.$$

Außerdem ist $\langle\cdot,\cdot\rangle : \underline{X}^J \times \underline{Y}^J \to \underline{(X\times Y)}^J$ ein uniformer Isomorphismus.

Wir gehen nun vom Raum der Netze zum Raum der Cauchy-Netze über.

Definition 3.10. Sei X ein uniformer Raum und J eine direkt gerichtete Menge. Dann ist der *Raum der Cauchy-Netze* in X auf J definiert durch:

$$\underline{\tilde{X}}^J := \left\{ (\mathbf{x}, \alpha) \in \underline{X}^J \times (\underline{I}_X \to \underline{J}) \mid \mathbf{x} \text{ ist Cauchy mit Modulus } \alpha \right\}.$$

Außerdem definiere die Abbildung $\tilde{\iota}_X^J : \underline{\tilde{X}}^J \to \underline{X}^J$ durch $\tilde{\iota}_X^J((\mathbf{x}, \alpha)) := \mathbf{x}$. Dann sei $\tilde{X}^J$ der von $(\underline{\tilde{X}}^J, \tilde{\iota}_X^J)$ induzierte uniforme Teilraum von X^J. Insbesondere gilt dann:

$$(\mathbf{x}, \alpha) =_{\tilde{X}^J} (\mathbf{y}, \beta) :\iff \mathbf{x} =_{X^J} \mathbf{y}, \qquad ((\mathbf{x}, \alpha), (\mathbf{y}, \beta)) \Vdash_{\tilde{X}^J} i :\iff (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Vdash_{X^J} i.$$

Wir wollen nun die Abbildungen aus Definition 3.4 auf die Räume der Cauchy-Netze einschränken.

Lemma 3.11. *Sei X ein uniformer Raum und J eine direkt gerichtete Menge. Dann gibt es eine uniform stetige injektive Abbildung $\tilde{\eta}_X^J : X \to \tilde{X}^J$, so dass das folgende Diagramm kommutiert:*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\tilde{\eta}_X^J"] \arrow[dr, "\eta_X^J"'] & \tilde{X}^J \arrow[d, "\tilde{\iota}_X^J"] \\
& X^J
\end{tikzcd}$$

Lemma 3.12. *Seien X, Y uniforme Räume, J eine direkt gerichtete Menge und $f : \underline{X} \to \underline{Y}$ eine uniform stetige Abbildung. Dann gibt es eine uniform stetige Abbildung $\tilde{f}^J : \tilde{X}^J \to \tilde{Y}^J$, so dass das folgende Diagramm kommutiert:*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\tilde{\eta}_X^J"] \arrow[d, "f"'] & \tilde{X}^J \arrow[r, "\tilde{\iota}_X^J"] \arrow[d, "\tilde{f}^J"] & X^J \arrow[d, "f^J"] \\
Y \arrow[r, "\tilde{\eta}_Y^J"'] & \tilde{Y}^J \arrow[r, "\tilde{\iota}_Y^J"'] & Y^J
\end{tikzcd}$$

Lemma 3.13. *Sei X ein uniformer Raum und seien J, J' direkt gerichtete Mengen. Weiterhin seien $\sigma : J' \to J$ und $\tau : J \to J'$ monotone Abbildungen, so dass $\forall j \in \underline{J} : j \preccurlyeq_J \sigma(\tau(j))$. Dann gibt es eine uniform stetige Abbildung $\tilde{\sigma}_X : \tilde{X}^J \to \tilde{X}^{J'}$, so dass das folgende Diagramm kommutiert:*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\tilde{\eta}_X^J"] \arrow[dr, "\tilde{\eta}_X^{J'}"'] & \tilde{X}^J \arrow[r, "\tilde{\iota}_X^J"] \arrow[d, "\tilde{\sigma}_X"] & X^J \arrow[d, "\sigma_X"] \\
& \tilde{X}^{J'} \arrow[r, "\tilde{\iota}_X^{J'}"'] & X^{J'}
\end{tikzcd}$$

Wir können nun auch die Produkte von Räumen der Cauchy-Netze betrachten.

Theorem 3.14. *Es seien X, Y uniforme Räume und J eine direkt gerichtete Menge. Dann gibt es einen uniformen Isomorphismus $\widetilde{\langle \cdot, \cdot \rangle} : \underline{\tilde{X}}^J \times \underline{\tilde{Y}}^J \to (\underline{\widetilde{X \times Y}})^J$, so dass das folgende Diagramm kommutiert:*

$$\begin{tikzcd}
X \times Y \arrow[r, "\tilde{\eta}_X^J \times \tilde{\eta}_Y^J"] \arrow[dr, "\tilde{\eta}_{X \times Y}^J"'] & \tilde{X}^J \times \tilde{Y}^J \arrow[r, "\tilde{\iota}_X^J \times \tilde{\iota}_Y^J"] \arrow[d, "\widetilde{\langle \cdot, \cdot \rangle}"] & X^J \times Y^J \arrow[d, "\langle \cdot, \cdot \rangle"] \\
& \widetilde{X \times Y}^J \arrow[r, "\tilde{\iota}_{X \times Y}^J"'] & (X \times Y)^J
\end{tikzcd}$$

Schließlich kommen wir zur eigentlichen Vervollständigung.

Definition 3.15 (Vervollständigung)**.** Sei X ein uniformer Raum. Dann ist ein *reguläres Netz* in X ein Cauchy-Netz $(x_j)_{j\in\underline{J}}$ in $\tilde{X}^{I_X}$ mit Modulus $\mathrm{id}_{\underline{I}_X} : I_X \to I_X$. Wir schreiben $\underline{\tilde{X}}$ für die Menge aller regulären Netze in X. Weiterhin definiere die Abbildung $\tilde{\imath}_X : \underline{\tilde{X}} \to \underline{\tilde{X}}^{I_X}$ durch $\tilde{\imath}_X(\mathbf{x}) := (\mathbf{x}, \mathrm{id}_{\underline{I}_X})$. Dann sei $\tilde{X}$ der von $(\underline{\tilde{X}}, \tilde{\imath}_X)$ induzierte uniforme Teilraum von $\tilde{X}^{I_X}$. Insbesondere gilt dann:

$$\mathbf{x} =_{\tilde{X}} \mathbf{y} :\iff \mathbf{x} =_{\tilde{X}^{I_X}} \mathbf{y}, \qquad\qquad (\mathbf{x},\mathbf{y}) \Vdash_{\tilde{X}} i :\iff (\mathbf{x},\mathbf{y}) \Vdash_{\tilde{X}^{I_X}} i.$$

Dann heißt $\tilde{X}$ die *Vervollständigung* von X.

Remark 3.16. Da $\eta_X^{I_X}(x)$ immer in $\underline{\tilde{X}}$ liegt, schreiben wir einfach nur $\eta_X : X \to \tilde{X}$. Nach den vorherigen Ergebnissen kommutiert auch das folgende Diagramm:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[dr, "\tilde{\eta}_X^{I_X}"'] & \tilde{X} \arrow[d, "\tilde{\imath}_X"] \\ & \tilde{X}^{I_X} \end{tikzcd}$$

Wir können viele Cauchy-Netze in X als reguläre Netze in $\tilde{X}$ interpretieren.

Lemma 3.17. *Sei X ein uniformer Raum und J eine direkt gerichtete Menge. Dann:*

- *falls $\mathbf{x} \in \underline{X}^J$ ein Cauchy-Netz in X mit Modulus $\gamma : I_X \to J$ ist, so ist $\mathbf{x}\circ\gamma \in \underline{\tilde{X}}$,*
- *falls $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \underline{X}^J$ Cauchy-Netze mit Moduli $\alpha,\beta : I_X \to I_X$ sind, so gilt:*

$$\forall j \in \underline{I}_X : (\mathbf{x},\mathbf{y}) \Vdash_{X^J} \rho_X^4(j) \implies (\mathbf{x}\circ\alpha, \mathbf{y}\circ\beta) \Vdash_{X^{I_X}} j,$$

- *falls $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \underline{X}^J$ Cauchy-Netze mit Moduli $\alpha,\beta : I_X \to I_X$ sind, so gilt:*

$$(\mathbf{x}\circ\alpha, \mathbf{y}\circ\beta) \Vdash_{X^{I_X}} \rho_X^4(j) \implies (\mathbf{x},\mathbf{y}) \Vdash_{X^J} j,$$

- *falls $\mathbf{x} \in \underline{X}^{I_X}$ ein Cauchy-Netz mit Modulus $\alpha : I_X \to I_X$ ist, so gilt:*

$$\mathbf{x}\circ\alpha =_{X^{I_X}} \mathbf{x}.$$

Proposition 3.18. *Sei X ein uniformer Raum und J eine direkt gerichtete Menge. Dann gibt es eine uniform stetige injektive Abbildung $\nu_X^J : \tilde{X}^J \to \tilde{X}$, so dass das folgende Diagramm kommutiert:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\tilde{\eta}_X^J"] \arrow[dr, "\eta_X"'] & \tilde{X}^J \arrow[d, "\nu_X^J"] \\ & \tilde{X} \end{tikzcd}$$

Inbesondere ist $\tilde{X}^J$ ein uniformer Teilraum von $\tilde{X}$. Außerdem ist $\nu_X^{I_X}$ ein uniformer Isomorphismus mit Inversem $\tilde{\imath}_X$, d.h. $\tilde{X} \simeq \tilde{X}^{I_X}$ ist eine uniforme Äquivalenz.

Proposition 3.19. *Sei X ein uniformer Raum und J eine direkt gerichtete Menge. Dann gibt es eine uniform stetige Abbildung $\theta_X^J : \tilde{\tilde{X}}^J \to \tilde{X}^{J \times I_X}$, so dass das folgende Diagramm kommutiert:*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\tilde{\eta}_X^{J\times I_X}"] \arrow[d, "\eta_X"'] & \tilde{X}^{J\times I_X} \\
\tilde{X} \arrow[r, "\tilde{\eta}_{\tilde{X}}^J"'] & \tilde{\tilde{X}}^J \arrow[u, "\theta_X^J"']
\end{tikzcd}$$

Lemma 3.20. *Es seien X, Y uniforme Räume. Dann gilt für alle uniform stetigen Abbildungen $f, g : \tilde{X} \to Y$:*

$$f \circ \eta_X \sim g \circ \eta_X \implies f \sim g.$$

Schließlich können wir vollständige uniforme Räume definieren.

Definition 3.21 (Vollständiger uniformer Raum)**.** Ein uniformer Raum X heißt *vollständig*, falls $\eta_X : X \to \tilde{X}$ ein uniformer Isomorphismus ist.

Theorem 3.22. *In vollständigen uniformen Räumen konvergieren alle Cauchy-Netze.*

Theorem 3.23. *Die Vervollständigung $\tilde{X}$ eines uniformen Raums X ist vollständig.*

Proof. Dies folgt durch das folgende Diagramm, welches durch frühere Ergebnisse kommutativ ist:

$$\begin{tikzcd}
\tilde{X} \arrow[r, shift left, "\tilde{\iota}_X"] \arrow[rrr, bend left, "\eta_{\tilde{X}}"] & \tilde{X}^{I_X\times I_X} \arrow[l, shift left, "\nu_X^{I_X\times I_X}"] & \tilde{\tilde{X}}^{I_X} \arrow[l, "\theta_X^{I_X}"'] \arrow[r, shift left, "\nu_{\tilde{X}}^{I_X}"] & \tilde{\tilde{X}} \arrow[l, shift left, "\tilde{\iota}_{\tilde{X}}"] \\
 & X \arrow[u, "\eta_X^{I_X\times I_X}"] \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[ul, bend left, "\eta_X"] & \tilde{X} \arrow[u, "\eta_{\tilde{X}}^{I_X}"] \arrow[ur, bend right, "\eta_{\tilde{X}}"'] &
\end{tikzcd}$$

□

Theorem 3.24. *Es seien X, Y uniforme Räume. Dann gilt $X \tilde{\times} Y \simeq \tilde{X} \times \tilde{Y}$ und $X \times Y$ ist genau dann vollständig, wenn X und Y vollständig sind.*