Riemann-Integral

Xiaohu Wang

Treppenfunktion

Wir wollen allgemeine Objekte definieren, für die das Integral ganz klar eindeutig definierbar ist. In klassischer Analysis sind solche Objekte die reellwertigen Treppenfunktionen auf einem Intervall, d.h. Funktionen der Form $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ sodass es eine endliche Folge $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ gibt mit $\varphi|_{(x_i, x_{i+1})}$ konstant.

Konstruktiv sind aber solche Funktionen nicht definierbar bzw. unberechenbar, da die Ordnungsrelation auf reellen Zahlen nicht entscheidbar ist. Der typische Lösungsansatz für dieses Problem ist, zunächst nur rationale Zahlen zu behandeln, die viel angenehmer sind. Genau diesen Ansatz werden wir heute auch hier verwenden.

Für uns ist eine Treppenfunktion formal einfach eine Liste aus rationalen Zahlen, deren Länge eine 2-Potenz ist. Wir benutzen für solche Listen sowohl die übliche Schreibweise $[a_0, a_1, \ldots]$ als auch die allgemeine Schreibweise $(a_i)_{i<2^n}$. Beispiele für solche Listen sind:

1. $\left[\frac{3}{5}\right]$
2. $\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$
3. $\left[\frac{5}{4}, -3\right]$

Gegenbeispiele, weil deren Längen keine 2-Potenzen sind:

- $[]$
- $\left[1, -2, \frac{3}{2}\right]$

Die Menge solcher Listen bezeichnen wir mit PC, L oder $\mathbb{L}(\mathbb{Q})$. Diese interpretieren wir als rationalwertige Abbildungen auf dem rationalen Einheitsintervall, also als Abb. $[0, 1] \cap \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$.

Treppenfunktion im Mehrdimensionalen

Nun schauen wir an, wie die obige Definition im Mehrdimensionalen verallgemeinert werden kann. Wir benutzen den folgenden Ansatz:

Definition 1 (Treppenfunktion)

Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Eine m-dimensionale Treppenfunktion der Präzision n ist:

- Falls $m = 0$: eine rationale Zahl $a \in \mathbb{Q}$.
- Falls $m = l + 1$, $l \in \mathbb{N}$: eine Liste $(u_i)_{i<2^n}$ der Länge 2^n, wo jedes Listenelement u_i eine l-dimensionale Treppenfunktion der Präzision n ist.

Eine m-dimensionale Treppenfunktion ist einfach eine m-dimensionale Treppenfunktion der Präzision n für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$. Die Menge aller m-dimensionalen Treppenfunktionen der Präzision n bezeichnen wir mit PC_n^m, L_n^m oder $\mathbb{L}(\mathbb{Q}^m)_n$. Falls wir das Subskript weglassen, so ist die Menge aller m-dimensionalen Treppenfunktionen gemeint. Eine m-dimensionale Treppenfunktion interpretieren wir als eine Abb. $([0, 1] \cap \mathbb{Q})^m \to \mathbb{Q}$. Es ist leicht einzusehen, dass eine eindimensionale Treppenfunktion einfach eine Treppenfunktion im Sinne des ersten Abschnittes ist.

Verfeinerung

Betrachte die eindimensionale Treppenfunktion $\left[\frac{1}{2}\right]$ der Präzision 0. Diese stellt die selbe Funktion dar wie das obige Beispiel 2 $\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Wir bezeichnen $\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ als die Verfeinerung von $\left[\frac{1}{2}\right]$. Allgemein definieren wir:

Definition 2 (Verfeinerung)

Ist $u \in L_n^m$, so sieht deren Verfeinerung $\mathrm{Ref}(u)$ allgemein wie folgt aus:

- Falls $m = 0$, i.e. $u = a \in \mathbb{Q}$: $\mathrm{Ref}(u) := u = a$.
- Falls $m = l + 1$, $l \in \mathbb{N}$, i.e. $u = (v_i)_{i<2^n}$, $v_i \in L^l_n$: $\mathrm{Ref}(u) := \left(\mathrm{Ref}\left(v_{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor}\right)\right)_{i<2^{n+1}}$.

Beispiele:
- $\mathrm{Ref}\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{3}{5}$
- $\mathrm{Ref}\left(\left[\frac{5}{4}, -3\right]\right) = \left[\frac{5}{4}, \frac{5}{4}, -3, -3\right]$
- $\mathrm{Ref}([1, 1, 5, 2]) = [1, 1, 1, 1, 5, 5, 2, 2]$
- $$\mathrm{Ref}\left(\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -3 & \frac{6}{5} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ -3 & -3 & \frac{6}{5} & \frac{6}{5} \\ -3 & -3 & \frac{6}{5} & \frac{6}{5} \end{bmatrix}$$

Wozu brauchen wir denn die Verfeinerung? Es ist klar, dass innerhalb von einem L^m_n sich übliche Rechenoperationen komponentenweise definieren lassen, wie z.B. Addition $+$, Multiplikation $\cdot$, Negation $-$, Infimum $\wedge$, Supremum $\vee$ sowie Absolutbetrag $|\cdot|$. Diese Operationen machen L^m_n zu einem Vektorraum, sogar einem Vektorverband über $\mathbb{Q}$. Es ist zusätzlich nicht schwer einzusehen, dass $\mathrm{Ref} : L^m_n \hookrightarrow L^m_{n+1}$ ein injektiver Vektorverband-Homomorphismus ist (d.h. linear & verträglich mit $\vee$). Somit haben wir das folgende ω-Diagramm in der Kategorie der $\mathbb{Q}$-Vektorverbände:

$$\mathbb{Q} \cong L^m_0 \overset{\mathrm{Ref}}{\hookrightarrow} L^m_1 \overset{\mathrm{Ref}}{\hookrightarrow} L^m_2 \overset{\mathrm{Ref}}{\hookrightarrow} \ldots$$

Der Kolimes (oder direkte Limes) dieses Diagramms ist nämlich L^m, die Menge der m-dimensionalen Treppenfunktionen. Somit ist L^m ebenfalls ein Vektorverband.

Da $\mathbb{Q} \cong L^m_0$, gibt es eine kanonische Einbettung $\iota : \mathbb{Q} \hookrightarrow L^m$, die jede rationale Zahl $a \in \mathbb{Q}$ auf die konstante Treppenfunktion abbildet, die überall den Wert a annimmt. Diesem Isomorphismus $\mathbb{Q} \to L^m_0$, den wir per Notationsmissbrauch auch als ι bezeichnen, möchten wir nun noch eine explizite Definition geben:

Definition 3 (Konstante Einbettung von $\mathbb{Q}$)
Ist $a \in \mathbb{Q}$ eine rationale Zahl und $m \in \mathbb{N}$, so ist $\iota(a) \in L^m_0$ wie folgt rekursiv definiert:
- Falls $m = 0$: $\iota(a) := a$.
- Falls $m = l + 1$, $l \in \mathbb{N}$: $\iota(a) := \begin{bmatrix} \underbrace{\iota(a)}_{\in L^l_n} \end{bmatrix}$

Die Einbettung $\iota : \mathbb{Q} \hookrightarrow L^m$ ist in der Tat eine Sektion, d.h. sie besitzt eine Linksinverse. Wir geben nun eine solche Linksinverse an, die wir als das Riemann-Integral einer Treppenfunktion bezeichnen:

Definition 4 (Riemann-Integral für Treppenfunktionen)
Ist $u \in L^m_n$, so ist dessen Riemann-Integral, geschrieben $E(u)$, wie folgt definiert:
- Falls $m = 0$, d.h. $u = a \in \mathbb{Q}$: $E(u) := u = a$
- Falls $m = l + 1$, $l \in \mathbb{N}$, d.h. $u = (v_i)_{i<2^n}$, $v_i \in L^l_n$: $E(u) := 2^{-n} \sum_{i<2^n} E(v_i)$, d.h. der Durchschnitt aller $E(v_i)$.

Lemma 5 (algebraische Eigenschaften des Integrals für Treppenfunktionen)
Für jedes $m \in \mathbb{N}$ definiert Definition 3 eine lineare Abbildung $E : L^m \to \mathbb{Q}$ mit der Eigenschaft

$$E(u) \vee E(v) \leq E(u \vee v)$$

für alle $u, v \in L^m$, und das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Q} \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[dr, leftrightarrow, "\mathrm{id}"'] & L^m \arrow[d, two heads, "E"] \\
& \mathbb{Q}
\end{tikzcd}$$

Beweis. Es ist klar, dass E mit Addition und Skalierung verträglich ist. Ferner ist E ebenfalls mit der Verfeinerung $\mathrm{Ref} : L_n^m \to L_{n+1}^m$ verträglich, d.h. folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
L_n^m \arrow[r, hook, "\mathrm{Ref}"] \arrow[d, two heads, "E"'] & L_{n+1}^m \arrow[dl, two heads, "E"] \\
\mathbb{Q}
\end{tikzcd}$$

Denn für jedes $u \in L_n^m$ gilt:

- Falls $m = 0$: $E(\mathrm{Ref}(u)) = E(u) = u$.
- Falls $m = l + 1, l \in \mathbb{N}$, d.h $u = (v_i)_{i<2^n}, v_i \in L_n^l$:

$$E(\mathrm{Ref}(u)) = E\Big(\Big(\mathrm{Ref}\big(v_{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor}\big)\Big)_{i<2^{n+1}}\Big) = 2^{-n-1} \sum_{i<2^{n+1}} E\Big(\mathrm{Ref}\big(v_{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor}\big)\Big)$$
$$= 2^{-n-1} \sum_{i<2^{n+1}} E\big(v_{\lfloor \frac{i}{2} \rfloor}\big) = 2^{-n-1} \cdot 2 \sum_{i<2^n} E(v_i) = 2^{-n} \sum_{i<2^n} E(v_i) = E(u)$$

  Hier haben wir in der 3. Gleichheit (sofort nach dem Zeilenumbruch) die Induktionshypothese für l verwendet.

Somit definiert E also auch eine lineare Abb. aus dem Kolimes L^m.

Nun zeigen wir, dass die im Lemma angegebene Ungleichung gilt. Seien o.B.d.A. $u, v \in L_n^m$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Wir machen wie gewöhnt Induktion über m:

- Falls $m = 0$, d.h. $u = a, v = b, a, b \in \mathbb{Q}$: $E(u) \vee E(v) = a \vee b = u \vee v = E(u \vee v)$.
- Falls $m = l + 1, l \in \mathbb{N}$, d.h. $u = (u_i')_{i<2^n}, v = (v_i')_{i<2^n}, u_i', v_i' \in L_n^l$:

$$E(u) \vee E(v) = \left(2^{-n} \sum_{i<2^n} E(u_i')\right) \vee \left(2^{-n} \sum_{i<2^n} E(v_i')\right)$$
$$= 2^{-n} \left(\left(\sum_{i<2^n} E(u_i') \right) \vee \left(\sum_{i<2^n} E(v_i') \right) \right) \leq 2^{-n} \left(\sum_{i<2^n} (E(u_i') \vee E(v_i')) \right)$$
$$\leq 2^{-n} \left(\sum_{i<2^n} E(u_i' \vee v_i') \right) = E(u \vee v)$$

Schließlich ist noch zu zeigen, dass das im Lemma angegebene Dreieck kommutiert. Da $\iota : \mathbb{Q} \to L_0^m$ ein Isomorphismus ist, müssen wir nur zeigen, dass $E : L_0^m \to \mathbb{Q}$ die (links-)Inverse dazu ist:

- Falls $m = 0$: für jedes $a \in \mathbb{Q}$ gilt $E(\iota(a)) = E(a) = a$.
- Falls $m = l + 1$, $l \in \mathbb{N}$: für jedes $a \in \mathbb{Q}$ gilt

$$E(\iota(a)) = E([\iota(a)]) = 2^{-0} \sum_{i<2^0} E(\iota(a)) = E(\iota(a)) = a$$

  Hier haben wir in der letzten Gleichheit die Induktionshypothese für l verwendet.

■

Der Sinn des ganzen ist, strukturelle Gemeinsamkeiten zwischen $\mathbb{Q}$ und L^m zu etablieren, um bekannte Konstrukte für $\mathbb{Q}$ auch auf L^m übertragen zu können.

Zum Abschluss dieses Abschnittes beweisen wir noch paar Eigenschaften von E, die wir später brauchen:

Lemma 6
Sei $m \in \mathbb{N}$ und $E : L^m \to \mathbb{Q}$ die in Definition 4 angegebene Abbildung, weiter seien $u, v \in L^m$ und $a \in \mathbb{Q}$. Es gilt
1. (Linearität) $E(au + v) = aE(u) + E(v)$
2. (Monotonie) $u \leq v \longrightarrow E(u) \leq E(v)$
3. (Dreiecksungleichung) $|E(u)| \leq E(|u|)$

Beweis.
1. Da E eine Vektorverband-Homomorphismus ist, ist sie stets linear.
2. $u \leq v$ bedeutet nichts anderes als $u \vee v = v$. Da E mit $\vee$ verträglich ist gilt

$$E(u) \vee E(v) \leq E(u \vee v) = E(v)$$

   Da auch $E(v) \leq E(u) \vee E(v)$ trivial gilt, folgt $E(u) \vee E(v) = E(v)$, also $E(u) \leq E(v)$.
3. $|E(u)| = E(u) \vee (-E(u)) \leq E(u \vee -u) = E(|u|)$

■

Riemann-intergrierbare Objekte

Die Menge Rib_m aller m-dimensionalen Riemann-integrierbaren Objekte (m-Ribs) ist die Vervollständigung von L^m als metrischer Raum, genau so wie $\mathbb{R}$ die Vervollständigung von $\mathbb{Q}$ ist. Insofern lassen sich viele Konstrukte und Eigenschaften von $\mathbb{R}$ leicht auf Rib_m übertragen, aufgrund der strukturellen Gemeinsamkeiten zwischen $\mathbb{Q}$ und L^m, die im letzten Abschnitt etabliert wurden. Deshalb lassen wir die Beweise der Lemmata in diesem Abschnitt weg, da diese völlig analog zum reellen Fall sind.

Definition 7
Ein m-dimensionales Riemann-integrierbares Objekt, oder kurz m-Rib, ist ein paar $\left((u_n)_{n\in\mathbb{N}}, M\right)$ mit $u_n \in L^m$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $M : \mathbb{P} \to \mathbb{N}$, sodass $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge mit M als Modul bildet, d.h. $|u_l - u_n| \leq \iota(2^{-p})$ für alle $p \in \mathbb{P}$ und $l, n \geq M(p)$, und M (nicht streng) monoton wachsend ist. Die Menge aller m-Ribs bezeichnen wir mit Rib_m.

Definition 8
Zwei m-Ribs $f := \left((u_n)_{n\in\mathbb{N}}, M\right)$ und $g := \left((v_n)_{n\in\mathbb{N}}, N\right)$ heißen *äquivalent* oder *gleich*, geschrieben $f = g$, falls $\left|u_{M(p+1)} - v_{N(p+1)}\right| \leq \iota(2^{-p})$ für alle $p \in \mathbb{P}$ gilt.

Lemma 9 (RibEqChar)
Für zwei m-Ribs $f := \left((u_n)_{n\in\mathbb{N}}, M\right)$ und $g := \left((v_n)_{n\in\mathbb{N}}, N\right)$ sind äquivalent

1. $f = g$.
2. $\forall_p \exists_{n_0} \forall_{n \geq n_0} (|u_n - v_n| \leq \iota(2^{-p}))$.

Lemma 10 (RibEqTrans)
Die Gleichheit (oder Äquivalenz) zwischen m-Ribs ist transitiv und somit eine Äquivalenzrelation.

Definition 11 (Nicht-negative und positive m-Ribs)
Ein m-Rib $f := \left((u_n)_{n\in\mathbb{N}}, M\right)$ heißt *nicht-negativ*, geschrieben $f \in \mathrm{Rib}_m^{0+}$, falls $-2^{-p} \leq u_{M(p)}$ für alle $p \in \mathbb{P}$ gilt. Es heißt *p-positiv*, geschrieben $f \underset{p}{\in} \mathrm{Rib}_m^{+}$, falls $2^{-p} \leq u_{M(p+1)}$. Es heißt einfach *positiv*, geschrieben $f \in \mathrm{Rib}_m^{+}$, falls es ein $p \in \mathbb{P}$ gibt sodass f p-positiv ist.

Lemma 12 (RibNNegChar)
Für ein m-Rib $f := \left((u_n)_{n\in\mathbb{N}}, M\right)$ sind äquivalent:
1. $f \in \mathrm{Rib}_m^{0+}$.
2. $\forall_p \exists_{n_0} \forall_{n \geq n_0} (-2^{-p} \leq u_n)$.

Lemma 13 (RibNNegCompat)
Für $f = g \in \mathrm{Rib}_m$, falls $f \in \mathrm{Rib}_m^{0+}$, so folgt auch $g \in \mathrm{Rib}_m^{0+}$.

Lemma 14 (RibPosChar)
Ist ein m-Rib $f := \left((u_n)_{n\in\mathbb{N}}, M\right)$ p-positiv für ein $p \in \mathbb{P}$, so gilt $2^{-p-1} \leq u_n$ für alle $n \geq M(p+1)$. Sei umgekehrt $\forall_{n \geq n_0} (2^{-q} \leq u_n)$ für ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so folgt $f \underset{q+1}{\in} \mathrm{Rib}_m^{+}$.

Lemma 15 (RibPosCompat)
Für $f = g \in \mathrm{Rib}_m$, falls $f \underset{p}{\in} \mathrm{Rib}_m^{+}$, so folgt auch $g \underset{p+2}{\in} \mathrm{Rib}_m^{+}$.

Lemma 16 (RibBound)
Zu jedem m-Rib $f := \left((u_n)_{n\in\mathbb{N}}, M\right)$ findet man ein $p_f \in \mathbb{P}$ sodass $|u_n| \leq \iota(2^{p_f})$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Genau so wie im reellen Fall ist die Zuordnung p_f zu jedem m-Rib f nicht kompatibel mit der Äquivalenz.

Definition 17 (Arithmetische Operationen für m-Ribs)
Für zwei m-Ribs $f := \left((u_n)_{n\in\mathbb{N}}, M\right)$ und $g := \left((v_n)_{n\in\mathbb{N}}, N\right)$ definieren wir $f + g$, $f \cdot g$, $f \vee g$ und $-f$, deren Folgen $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und Moduln K durch die folgende Tabelle gegeben sind:

	w_n	$K(p)$
$f+g$	$u_n + v_n$	$\max(M(p+1), N(p+1))$
$f \cdot g$	$u_n \cdot v_n$	$\max\left(M\left(p+1+p_g\right), N\left(p+1+p_f\right)\right)$
$f \vee g$	$u_n \vee v_n$	$\max(M(p), N(p))$
$-f$	$-u_n$	$M(p)$

Lemma 18 (Wohldefiniertheit der arithmetischen Op.)
Für zwei m-Ribs $f := \left((u_n)_{n\in\mathbb{N}}, M\right)$ und $g := \left((v_n)_{n\in\mathbb{N}}, N\right)$ sind $f + g$, $f \cdot g$, $f \vee g$ und $-f$ so wie oben definiert ebenfalls m-Ribs.

Riemann-Integral für integrierbare Objekte

Definition 19 (Riemann-Integral für m-Ribs)
Ist $f := \left((u_n)_{n\in\mathbb{N}}, M\right)$ ein m-Rib, so ist dessen Riemann-Integral, geschrieben $\int f$, die reelle Zahl $\left((E(u_n))_{n\in\mathbb{N}}, M\right)$.

Lemma 20 (Wohldefiniertheit des Riemann-Integrals)
Ist $f := \left((u_n)_{n\in\mathbb{N}}, M\right)$ ein m-Rib, so ist $\int f$ so wie oben definiert tatsächlich eine reelle Zahl.

Beweis. Wir müssen also zeigen, dass $(E(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine rationale Cauchy-Folge mit M als Modul ist, d.h. $|E(u_l) - E(u_n)| \leq 2^{-p}$ für alle $p \in \mathbb{P}$ und $l, m \geq M(p)$:

$$|E(u_l) - E(u_n)| = |E(u_l - u_n)| \leq E(|u_l - u_n|) \leq E(\iota(2^{-p})) = 2^{-p}$$

■

Zum Schluss zeigen wir noch paar arithmetische Eigenschaften des Riemann-Integrals:

Lemma 21 (Arithmetische Eigenschaften des Riemann-Integrals)
Sind $f := \left((u_n)_{n\in\mathbb{N}}, M\right)$ und $g := \left((v_n)_{n\in\mathbb{N}}, N\right)$ zwei m-Ribs und $x := \left((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, K\right)$ eine reelle Zahl, so gelten:
1. $\int(xf + g) = x\int f + \int g$.
2. $\int(-f) = -\int f$
3. $\int(f \vee g) \geq \int f \vee \int g$ (im Gegensatz zur Gleichheit wie im Skript, was leider falsch ist).
4. $\int|f| \geq \left|\int f\right|$

Beweis.
1. Die Cauchy-Folge der linken Seite ist gegeben durch $(E(a_n u_n + v_n))_{n\in\mathbb{N}}$, und die Folge der rechten Seite ist gegeben durch $(a_n E(u_n) + E(v_n))_{n\in\mathbb{N}}$. Beide Folgen sind aufgrund der Linearität von $E : L^m \to \mathbb{Q}$ gleich.
2. Da additive Inverse in $\mathbb{R}$ eindeutig ist, folgt dies direkt aus 1.
3. $E(u_n \vee v_n) \geq E(u_n) \vee E(v_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
4. Da $|f| = f \vee (-f)$ folgt dies direkt aus 2 und 3.

■