

Konstruktive Analysis

Die Vollständigkeit der reellen Zahlen

Im folgenden Text wird ein konstruktiver Beweis der Vollständigkeit der reellen Zahlen dargelegt. Auf dem Weg dorthin werden außerdem ein paar weitere wichtige Definitionen angegeben und grundlegende Resultate über die reellen Zahlen in der konstruktiven Analysis bewiesen. Vorausgesetzt wird, dass die Zahlensysteme bis einschließlich der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ bereits in konstruktiver Art und Weise eingeführt wurden. Darauf wird im Folgenden nicht weiter eingegangen. Die Eigenschaften dieser Zahlensysteme, die hier benötigt werden, entsprechen allerdings denen, die auch aus der klassischen Analysis bekannt sind. Insbesondere gilt zum Beispiel für rationale Zahlen die Dreiecksungleichung.

Dieses Dokument basiert auf dem Text *Constructive analysis with witnesses* von Helmut Schwichtenberg aus dem Wintersemester 2023/24. Alle hier angegebenen Definitionen und Resultate sind auch im Beweisassistenten *Minlog* formalisiert, nämlich in den Bibliotheken `rea.scm` und `rseq.scm`.

Für die Namen von Variablen gelten stets folgende Konventionen: n, n_0, n_1, m, l bezeichnen natürlich Zahlen, p, q (echt) positive ganze Zahlen, a eine rationale Zahl, $(a_n)_n$, $(b_n)_n$, $(c_n)_n$ Folgen von rationalen Zahlen, x, y, z reelle Zahlen und $(x_n)_n$ eine Folge von reellen Zahlen.

Inhaltsverzeichnis

1	Reelle Zahlen und Äquivalenz von reellen Zahlen	2
2	Nichtnegative und (p-)positive reelle Zahlen	3
3	Grundlegende arithmetische Funktionen	5
4	Vergleichbarkeit von reellen Zahlen	6
5	Cauchy-Folgen, Konvergenz und Vollständigkeit	8

1 Reelle Zahlen und Äquivalenz von reellen Zahlen

Wir beginnen mit zwei grundlegenden Definitionen und beweisen einige Eigenschaften über die Gleichheit von reellen Zahlen.

Definition 1. Eine **reelle Zahl** x ist ein Paar $((a_n)_{n \in \mathbb{N}}, M)$ aus einer Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}$ von rationalen Zahlen und einer Abbildung $M: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{N}$, sodass $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine *Cauchy-Folge* mit *(Cauchy-)Modul* M ist:

- (i) $|a_n - a_m| \leq \frac{1}{2^p}$ für $n, m \geq M(p)$
- (ii) $M(p) \leq M(q)$ für $p \leq q$ (M ist monoton wachsend).

Die rationalen Zahlen werden in die reellen Zahlen eingebettet, indem jede rationale Zahl a als reelle Zahl $((a_n)_{n \in \mathbb{N}}, M)$ mit der konstanten Folge $a_n = a$ und dem konstanten Modul $M(p) = 0$ aufgefasst wird.

Definition 2. Zwei reelle Zahlen $x := ((a_n)_{n \in \mathbb{N}}, M)$, $y := ((b_n)_{n \in \mathbb{N}}, N)$ sind **äquivalent** genau dann, wenn

$$|a_{M(p+1)} - b_{N(p+1)}| \leq \frac{1}{2^p} \text{ für alle } p \in \mathbb{Z}^+.$$

Ist aus dem Kontext klar, was gemeint ist, sagen wir auch, dass x und y *gleich* sind und schreiben $x = y$. Die Gleichheit von reellen Zahlen lässt sich wie folgt charakterisieren:

Lemma 1 (RealEqChar1, RealEqChar2). *Seien $x := ((a_n)_{n \in \mathbb{N}}, M)$, $y := ((b_n)_{n \in \mathbb{N}}, N)$ reelle Zahlen. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

- (a) $x = y$
- (b) $\forall p \exists n_0 \forall n \geq n_0 (|a_n - b_n| \leq \frac{1}{2^p})$.

Beweis. (a) $\rightarrow$ (b). Sei $n_0 := \max(M(p+2), N(p+2))$. Dann gilt für alle $n \geq n_0$:

$$\begin{aligned} |a_n - b_n| &\leq |a_n - a_{M(p+2)}| + |a_{M(p+2)} - b_{N(p+2)}| + |b_{N(p+2)} - b_n| \\ &\leq \frac{1}{2^{p+2}} + \frac{1}{2^{p+1}} + \frac{1}{2^{p+2}} = \frac{1}{2^p}. \end{aligned}$$

(b) $\rightarrow$ (a). Sei $q \in \mathbb{Z}^+$ und wähle n_0 zu q . Sei zudem $n := \max(n_0, M(p+1), N(p+1))$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} |a_{M(p+1)} - b_{N(p+1)}| &\leq |a_{M(p+1)} - a_n| + |a_n - b_n| + |b_n - b_{N(p+1)}| \\ &\leq \frac{1}{2^{p+1}} + \frac{1}{2^q} + \frac{1}{2^{p+1}} = \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^q}. \end{aligned}$$

Da dies für alle $q \in \mathbb{Z}^+$ gilt, folgt $|a_{M(p+1)} - b_{N(p+1)}| \leq \frac{1}{2^p}$ für alle $p \in \mathbb{Z}^+$. □

Korollar 1 (RealSeqEqToEq). *Seien $x := ((a_n)_{n \in \mathbb{N}}, M)$, $y := ((b_n)_{n \in \mathbb{N}}, N)$ reelle Zahlen mit Cauchy-Folgen, die ab dem n_0 -ten Folgenglied gleich sind (d.h. $a_n = b_n$ für $n \geq n_0$). Dann gilt $x = y$.*

Um zu zeigen, dass die Gleichheit tatsächlich eine Äquivalenzrelation ist, beweisen wir folgendes Lemma:

Lemma 2 (RealEqTrans). *Gleichheit zwischen reellen Zahlen ist transitiv.*

Beweis. Seien x, y, z reelle Zahlen mit Cauchy-Folgen $(a_n)_n, (b_n)_n, (c_n)_n$. Es gelte $x = y, y = z$. Lemma 1 (RealEqChar1) liefert n_0, n_1 zu $p + 1$, sodass für $n \geq \max(n_0, n_1)$ gilt:

$$|a_n - c_n| \leq |a_n - b_n| + |b_n - c_n| \leq \frac{1}{2^{p+1}} + \frac{1}{2^{p+1}} = \frac{1}{2^p}.$$

Gemäß Lemma 1 (RealEqChar2) gilt also auch $x = z$. $\square$

Da Reflexivität (RealEqRefl) und Symmetrie (RealEqSym) direkt aus Definition 2 folgen, gilt damit:

Korollar 2. *Die Gleichheit zwischen reellen Zahlen ist eine Äquivalenzrelation.*

2 Nichtnegative und (p-)positive reelle Zahlen

Wir wollen nun nichtnegative und (p-)positive reelle Zahlen einführen. Diese Definitionen benötigen wir später wiederum für die Definitionen von $\leq$ und $<$.

Definition 3. Eine reelle Zahl $x := ((a_n)_{n \in \mathbb{N}}, M)$ ist **nichtnegativ** (geschrieben $x \in \mathbb{R}^{0+}$) genau dann, wenn

$$-\frac{1}{2^p} \leq a_{M(p)} \quad \text{für alle } p \in \mathbb{Z}^+.$$

Auch hier gibt es eine nützliche Charakterisierung:

Lemma 3 (RealNNegChar1, RealNNegChar2). *Für jede reelle Zahl $x := ((a_n)_{n \in \mathbb{N}}, M)$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

- (a) $x \in \mathbb{R}^{0+}$
- (b) $\forall p \exists n_0 \forall n \geq n_0 (-\frac{1}{2^p} \leq a_n)$.

Beweis. (a) $\rightarrow$ (b). Sei $n_0 := M(p + 1)$. Dann gilt für alle $n \geq n_0$:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2^p} &\leq -\frac{1}{2^{p+1}} + a_{M(p+1)} = -\frac{1}{2^{p+1}} + a_{M(p+1)} - a_n + a_n \\ &\leq -\frac{1}{2^{p+1}} + |a_{M(p+1)} - a_n| + a_n \leq -\frac{1}{2^{p+1}} + \frac{1}{2^{p+1}} + a_n = a_n. \end{aligned}$$

(b) $\rightarrow$ (a). Sei $q \in \mathbb{Z}^+$ und wähle n_0 zu q . Sei zudem $n := \max(n_0, M(p))$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2^p} - \frac{1}{2^q} &\leq -\frac{1}{2^p} + a_n = -\frac{1}{2^p} + a_n - a_{M(p)} + a_{M(p)} \\ &\leq -\frac{1}{2^p} + |a_n - a_{M(p)}| + a_{M(p)} \leq -\frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p} + a_{M(p)} = a_{M(p)}. \end{aligned}$$

Da dies für alle $q \in \mathbb{Z}^+$ gilt, folgt $-\frac{1}{2^p} \leq a_{M(p)}$ für alle $p \in \mathbb{Z}^+$. $\square$

Die Nichtnegativität ist verträglich mit der Gleichheit von reellen Zahlen:

Lemma 4. *Für alle reellen Zahlen x, y gilt:*

$$x = y \rightarrow x \in \mathbb{R}^{0+} \rightarrow y \in \mathbb{R}^{0+}.$$

Beweis. Wir zeigen (b) aus dem vorherigen Lemma. Sei $x := ((a_n)_n, M)$, $y := ((b_n)_n, N)$. Es gelte $x = y$ und $x \in \mathbb{R}^{0+}$. Lemma 1 (RealEqChar1) liefert ein n_0 zu $p + 1$ und Lemma 3 (RealNNegChar1) ein n_1 zu $p + 1$, sodass für alle $n \geq \max(n_0, n_1)$ gilt:

$$-\frac{1}{2^p} \leq -\frac{1}{2^{p+1}} + a_n \leq (b_n - a_n) + a_n = b_n. \quad \square$$

Die (p-)positiven reellen Zahlen sind folgendermaßen definiert:

Definition 4. Eine reelle Zahl $x := ((a_n)_{n \in \mathbb{N}}, M)$ ist **p-positiv** (geschrieben $x \in_p \mathbb{R}^+$) genau dann, wenn

$$\frac{1}{2^p} \leq a_{M(p+1)}.$$

Im Unterschied zur Nichtnegativität gibt es hier einen Zeugen p . Ist die explizite Angabe des Zeugen nicht erforderlich, schreiben wir auch $x \in \mathbb{R}^+$. Wie bei Gleichheit und Nichtnegativität lässt sich eine Charakterisierung für die Positivität angeben, jedoch mit einer Änderung des Zeugen:

Lemma 5 (RealPosChar1, RealPosChar2). *Für jede reelle Zahl $x := ((a_n)_{n \in \mathbb{N}}, M)$ gilt:*

$$(a) \quad x \in_p \mathbb{R}^+ \rightarrow \forall_n (n \geq M(p+1) \rightarrow \frac{1}{2^{p+1}} \leq a_n)$$

$$(b) \quad \forall_{n \geq n_0} (\frac{1}{2^p} \leq a_n) \rightarrow x \in_{p+1} \mathbb{R}^+.$$

Beweis. (a). Es gelte $x \in_p \mathbb{R}^+$, d.h. $\frac{1}{2^p} \leq a_{M(p+1)}$. Dann folgt für $n \geq M(p+1)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^{p+1}} &= -\frac{1}{2^{p+1}} + \frac{1}{2^p} \leq -\frac{1}{2^{p+1}} + a_{M(p+1)} = -\frac{1}{2^{p+1}} + a_{M(p+1)} - a_n + a_n \\ &\leq -\frac{1}{2^{p+1}} + |a_{M(p+1)} - a_n| + a_n \leq -\frac{1}{2^{p+1}} + \frac{1}{2^{p+1}} + a_n = a_n. \end{aligned}$$

(b). Für $n := \max(n_0, M(p+2))$ gilt:

$$\frac{1}{2^{p+1}} < -\frac{1}{2^{p+2}} + \frac{1}{2^p} \leq -\frac{1}{2^{p+2}} + a_n \leq (a_{M(p+2)} - a_n) + a_n = a_{M(p+2)}.$$

Per Definition entspricht das $x \in_{p+1} \mathbb{R}^+$. □

Analog zur Nichtnegativität ist die Positivität mit der Gleichheit verträglich. Allerdings kann nicht der gleiche Zeuge beibehalten werden:

Lemma 6 (RealPosSemiCompat). *Für alle reellen Zahlen x, y gilt:*

$$x = y \rightarrow x \in_p \mathbb{R}^+ \rightarrow y \in_{p+2} \mathbb{R}^+.$$

Beweis. Sei $x := ((a_n)_{n \in \mathbb{N}}, M)$ und $y := ((b_n)_{n \in \mathbb{N}}, N)$. Es gelte $x = y$ und $x \in_p \mathbb{R}^+$. Zu zeigen ist per Definition $\frac{1}{2^{p+2}} \leq b_{N(p+3)}$. Mit Lemma 5 (RealPosChar1) und der Monotonie von M (insbes.: $M(p+3) \geq M(p+1)$) folgt $\frac{1}{2^{p+1}} \leq a_{M(p+3)}$. Die Definition der Gleichheit liefert $-\frac{1}{2^{p+2}} \leq b_{N(p+3)} - a_{M(p+3)}$. Insgesamt:

$$\frac{1}{2^{p+2}} = \frac{1}{2^{p+1}} - \frac{1}{2^{p+2}} \leq a_{M(p+3)} + (b_{N(p+3)} - a_{M(p+3)}) = b_{N(p+3)}. \quad \square$$

3 Grundlegende arithmetische Funktionen

Um später die Definition einer Cauchy-Folge von reellen Zahlen angeben zu können, benötigen wir einige arithmetische Funktionen. Die übrigen grundlegenden arithmetischen Funktionen werden der Vollständigkeit halber ebenfalls eingeführt. Zunächst beginnen wir jedoch mit einem Lemma, das auch für sich allein wichtig ist:

Lemma 7 (RealBound). *Für jede reelle Zahl $x := ((a_n)_{n \in \mathbb{N}}, M)$ lässt sich eine Zahl $p_x \in \mathbb{N}$ konstruieren, sodass gilt:*

$$|a_n| \leq 2^{p_x} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Beweis. Wähle das kleinste p_x , sodass $\max\{|a_n| : n \leq M(1)\} + \frac{1}{2} \leq 2^{p_x}$. Dann folgt direkt $|a_n| \leq 2^{p_x}$ für $n \leq M(1)$ und für $n > M(1)$ gilt:

$$|a_n| \leq |a_n - a_{M(1)}| + |a_{M(1)}| \leq \frac{1}{2} + |a_{M(1)}| \leq 2^{p_x}. \quad \square$$

Bemerkung. Diese Zuordnung von p_x zu x ist nicht verträglich mit der Gleichheit (das heißt, $x = y \rightarrow p_x = p_y$ gilt im Allgemeinen *nicht*).

Unter Verwendung des vorangegangenen Lemmas geben wir nun folgende Definition für die grundlegenden arithmetischen Funktionen an:

Definition 5. Für reelle Zahlen $x := ((a_n)_{n \in \mathbb{N}}, M)$, $y := ((b_n)_{n \in \mathbb{N}}, N)$ sind $x + y$, $-x$, $|x|$, $x \cdot y$ und $1/x$ (letzteres nur, falls $|x| \in_q \mathbb{R}^+$) definiert als das Paar, das durch die jeweilige Folge $(c_n)_n \subseteq \mathbb{Q}$ mit dem jeweiligen Modul K gegeben ist:

	c_n	$K(p)$
$x + y$	$a_n + b_n$	$\max(M(p+1), N(p+1))$
$-x$	$-a_n$	$M(p)$
$ x $	$ a_n $	$M(p)$
$x \cdot y$	$a_n \cdot b_n$	$\max(M(p+1+p_y), N(p+1+p_x))$
$1/x$ für $ x \in_q \mathbb{R}^+$	$\begin{cases} 1/a_n & \text{falls } a_n \neq 0 \\ 0 & \text{falls } a_n = 0 \end{cases}$	$M(2(q+1)+p).$

Bemerkung. Für alle reellen Zahlen x, y sind $x + y$, $-x$, $|x|$, $x \cdot y$ und, falls $|x| \in_q \mathbb{R}^+$, $1/x$ ebenfalls reelle Zahlen. Für den Beweis der Fälle $x \cdot y$ und $1/x$ sind die Identitäten $|a_n b_n - a_m b_m| = |a_n(b_n - b_m) + b_m(a_n - a_m)|$ bzw. $|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_m}| = \frac{|a_n - a_m|}{|a_n a_m|}$ hilfreich. Alle soeben definierten arithmetischen Funktionen (bei $1/x$ wieder unter der Bedingung $|x| \in_q \mathbb{R}^+$) sind zudem verträglich mit der Gleichheit. Der Beweis wird durch folgendes Lemma verkürzt (z.B. muss durch die Kommutativität nur $x = y \rightarrow x + z = y + z$ gezeigt werden):

Lemma 8 (Körpereigenschaften). *Für alle reellen Zahlen x, y, z gilt:*

- | | |
|---|---|
| (a1) $x + (y + z) = (x + y) + z$ | (b1) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ |
| (a2) $x + 0 = x$ | (b2) $x \cdot 1 = x$ |
| (a3) $x + (-x) = 0$ | (b3) $ x \in \mathbb{R}^+ \rightarrow x \cdot \frac{1}{x} = 1$ |
| (a4) $x + y = y + x$ | (b4) $x \cdot y = y \cdot x$ |
| (c) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ | |

Beweis. Die Aussagen folgen direkt aus Korollar 1 (RealSeqEqToEq) und den Eigenschaften der rationalen Zahlen. $\square$

Zuletzt geben wir noch ein nützliches Lemma zu nichtnegativen bzw. positiven reellen Zahlen an:

Lemma 9. *Für alle reellen Zahlen x, y gilt:*

- (a) $x, y \in \mathbb{R}^{0+} \rightarrow x + y, x \cdot y \in \mathbb{R}^{0+}$
- (b) $x, y \in \mathbb{R}^+ \rightarrow x + y, x \cdot y \in \mathbb{R}^+$
- (c) $x \in \mathbb{R}^{0+} \rightarrow -x \in \mathbb{R}^{0+} \rightarrow x = 0$.

4 Vergleichbarkeit von reellen Zahlen

Als letzten Schritt vor der Definition, was eine Cauchy-Folge von reellen Zahlen ist, führen wir die Relationen $\leq$ und $<$ ein (letztere nur der Vollständigkeit halber).

Definition 6. Seien x, y reelle Zahlen.

- (i) $x \leq y$:gdw $y - x \in \mathbb{R}^{0+}$
- (ii) $x <_p y$:gdw $y - x \in_p \mathbb{R}^+$.

Wie zuvor wird manchmal auf die explizite Angabe des Zeugen p verzichtet. Mit der Definition der Nichtnegativität und Lemma 3 (RealNNegChar1, RealNNegChar2) erhalten wir folgende Charakterisierung der $\leq$ -Relation:

Lemma 10 (RealLeChar1, RealLeChar2). Seien $x := ((a_n)_{n \in \mathbb{N}}, M)$, $y := ((b_n)_{n \in \mathbb{N}}, N)$ reelle Zahlen. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (a) $x \leq y$
- (b) $\forall_p (a_{K(p)} \leq b_{K(p)} + \frac{1}{2^p})$ mit $K(p) := \max(M(p+1), N(p+1))$
- (c) $\forall_p \exists_{n_0} \forall_{n \geq n_0} (a_n \leq b_n + \frac{1}{2^p})$.

Eines der meistgenutzten Lemmata überhaupt ist unbestreitbar das folgende:

Lemma 11 (RealLeAbsPlus, Dreiecksungleichung). Für alle reellen Zahlen x, y gilt:

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

Beweis. Sei $x := ((a_n)_{n \in \mathbb{N}}, M)$ und $y := ((b_n)_{n \in \mathbb{N}}, N)$. Wir beweisen Bedingung (c) aus dem vorherigen Lemma. Sei $n_0 := 0$. Dann gilt für alle $n \geq n_0$:

$$|a_n + b_n| \leq |a_n| + |b_n| \leq |a_n| + |b_n| + \frac{1}{2^p}. \quad \square$$

Ein bekanntes Resultat ist zudem das folgende: Jede reelle Zahl lässt sich mit beliebiger Genauigkeit durch eine rationale Zahl approximieren:

Lemma 12 (RealApprox). Für jede reelle Zahl x gilt:

$$\forall_p \exists_a (|a - x| \leq \frac{1}{2^p}).$$

Beweis. Wir zeigen Bedingung (c) aus dem vorangegangenen Lemma. Sei $x := ((a_n)_n, M)$, $a := a_{M(p)}$ und sei q beliebig. Dann gilt für alle $n \geq M(p)$:

$$|a - a_n| = |a_{M(p)} - a_n| \leq \frac{1}{2^p} \leq \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^q}. \quad \square$$

Aus Lemma 8 und Lemma 9 erhalten wir außerdem:

Lemma 13. Für alle reellen Zahlen x, y, z gilt:

$x \leq x$	$x \not\leq x$
$x \leq y \rightarrow y \leq x \rightarrow x = y$	$x < y \rightarrow y < z \rightarrow x < z$
$x \leq y \rightarrow y \leq z \rightarrow x \leq z$	$x < y \rightarrow x + z < y + z$
$x \leq y \rightarrow x + z \leq y + z$	$x < y \rightarrow z \in \mathbb{R}^+ \rightarrow x \cdot z < y \cdot z$
$x \leq y \rightarrow z \in \mathbb{R}^{0+} \rightarrow x \cdot z \leq y \cdot z$	

5 Cauchy-Folgen, Konvergenz und Vollständigkeit

Wir sind nun in der Lage, die zentralen Definitionen für den Beweis der Vollständigkeit der reellen Zahlen anzugeben.

Definition 7. Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ von reellen Zahlen

(i) ist eine **Cauchy-Folge** mit Modul $M: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{N}$:gdw

$$|x_n - x_m| \leq \frac{1}{2^p} \quad \text{für alle } n, m \geq M(p).$$

(ii) **konvergiert** mit Modul $M: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{N}$ gegen eine reelle Zahl x (ihren *Limes*) :gdw

$$|x_n - x| \leq \frac{1}{2^p} \quad \text{für alle } n \geq M(p).$$

Bemerkung. Der Limes einer konvergenten Folge von reellen Zahlen ist eindeutig bestimmt: Angenommen, $(x_n)_n$ konvergiert zusätzlich mit Modul N gegen y . Sei p beliebig und sei $m := \max(M(p+2), N(p+2))$. Dann gilt $|x - y| \leq |x - x_m| + |x_m - y| \leq \frac{1}{2^{p+1}}$. Sei $(a_n)_n$ die Folge von x und $(b_n)_n$ die Folge von y . Lemma 10 (c) (RealLeChar1) liefert ein n_0 zu $p+1$, sodass für alle $n \geq n_0$ gilt: $|a_n - b_n| \leq \frac{1}{2^{p+1}} + \frac{1}{2^{p+1}} = \frac{1}{2^p}$. Aus Lemma 1 (RealEqChar2) folgt $x = y$.

Des Weiteren folgt aus der Dreiecksungleichung, dass jede konvergente Folge von reellen Zahlen mit Modul M auch eine Cauchy-Folge mit Modul $p \mapsto M(p+1)$ ist: $|x_n - x_m| \leq |x_n - x| + |x - x_m| \leq \frac{1}{2^p}$ für $m, n \geq M(p+1)$. Das Ziel ist es, auch die Umkehrung zu beweisen. Dafür beginnen wir mit folgendem Lemma:

Lemma 14 (RatCauchyConvMod). *Jede Cauchy-Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von rationalen Zahlen mit Modul M konvergiert mit dem selben Modul gegen die durch sie repräsentierte reelle Zahl $x := ((a_n)_{n \in \mathbb{N}}, M)$:*

$$\forall_{p,n} (n \geq M(p) \rightarrow |a_n - x| \leq \frac{1}{2^p})$$

Beweis. Wir zeigen wieder einmal Bedingung (c) aus Lemma 10 (RealLeChar2). Sei n fest, q beliebig und sei $n_0 := M(p)$. Dann gilt für $m \geq n_0$:

$$|a_n - a_m| \leq \frac{1}{2^p} \leq \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^q}. \quad \square$$

Unter Verwendung dieses Lemmas können wir nun einen großen Schritt in Richtung Vollständigkeit machen:

Lemma 15 (RealCompleteAux1, RealCompleteAux2, RealLimReal). Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ mit $x_n := ((a_{nl})_l, N_n)$ eine Cauchy-Folge von reellen Zahlen mit Modul M . Dann ist $x := ((b_n)_{n \in \mathbb{N}}, K)$ mit $b_n := a_{nN_n(n)}$ und $K(p) := \max(M(p+1), p+2)$ eine reelle Zahl.

Beweis. Aus dem vorangegangenen Lemma folgt $|a_{nl} - x_n| \leq \frac{1}{2^p}$ für alle p, n und alle $l \geq N_n(p)$. Für $p := n$, $l := N_n(n)$ gilt also insbesondere

$$|b_n - x_n| \leq \frac{1}{2^n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}. \quad (*)$$

Damit erhalten wir für alle $n, m \geq K(p) = \max(M(p+1), p+2)$:

$$|b_n - b_m| \leq |b_n - x_n| + |x_n - x_m| + |x_m - b_m| \leq \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{p+1}} + \frac{1}{2^m} \leq \frac{1}{2^{p+2}} + \frac{1}{2^{p+1}} + \frac{1}{2^{p+2}} = \frac{1}{2^p}.$$

Da K aufgrund der Monotonie von M und $\max$ ebenfalls monoton ist, ist $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ somit eine Cauchy-Folge von rationalen Zahlen mit Modul K . $\square$

Jetzt fehlt nur noch der Beweis, dass $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auch tatsächlich gegen x konvergiert:

Lemma 16 (RealCompleteAux3, ehemals RealCauchyConvMod). Unter den Voraussetzungen des vorangegangenen Lemmas gilt: Die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit Cauchy-Modul M konvergiert mit dem gleichen Modul M gegen x .

Beweis. Sei $m := \max(M(p), K(q+1), q+1)$. Dann gilt unter Verwendung von $(*)$ aus dem vorherigen Lemma und unter Verwendung von Lemma 14 (RatCauchyConvMod) für alle $n \geq M(p)$:

$$\begin{aligned} |x_n - x| &\leq |x_n - x_m| + |x_m - b_m| + |b_m - x| \\ &\leq \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^{q+1}} \leq \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^{q+1}} + \frac{1}{2^{q+1}} = \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^q}. \end{aligned}$$

Da dies für alle q gilt, folgt $|x_n - x| \leq \frac{1}{2^p}$ für alle $n \geq M(p)$. $\square$

Aus den beiden letzten Lemmata erhalten wir nun direkt die Vollständigkeit:

Korollar 3 (RealComplete, Vollständigkeit). Zu jeder Cauchy-Folge von reellen Zahlen lässt sich eine reelle Zahl finden, gegen die sie konvergiert.

Als letztes beweisen wir eine nützliche Beziehung zwischen dem Limes einer Folge und der Nichtnegativität der Folgenglieder:

Lemma 17. Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge von reellen Zahlen und sei x ihr Limes. Dann gilt:

$$\forall_n (x_n \in \mathbb{R}^{0+}) \rightarrow x \in \mathbb{R}^{0+}.$$

Beweis. Sei $x_n := ((a_{nl})_l, N_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Als konvergente Folge ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ insbesondere eine Cauchy-Folge. Sei M ihr Cauchy-Modul. Aus den vorangegangenen Beweisen von Lemma 15 und Lemma 16 ist daher bekannt, dass $(b_n)_n$ mit $b_n := a_{nN_n(n)}$ eine Cauchy-Folge mit Modul $K(p) := \max(M(p+1), p+2)$ ist, die x repräsentiert. Es gelte $x_n \in \mathbb{R}^{0+}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, d.h.:

$$-\frac{1}{2^q} \leq a_{nN_n(q)} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{Z}^+.$$

Zu zeigen ist $x \in \mathbb{R}^{0+}$, d.h.:

$$-\frac{1}{2^p} \leq b_{K(p)} \quad \text{für alle } p \in \mathbb{Z}^+.$$

Wegen $p < K(p)$ (gemäß Definition von K) gilt mit $q := K(p)$ und $n := K(p)$:

$$-\frac{1}{2^p} \leq -\frac{1}{2^{K(p)}} \leq a_{K(p)N_{K(p)}(K(p))} = b_{K(p)} \quad \text{für alle } p \in \mathbb{Z}^+. \quad \square$$