1 Vektorverbände

Bevor wir Vektorverbände definieren können, brauchen wir die Definition eines Halbverbandes.

Definition 1.1. Ein **Halbverband** ist ein Paar $(L, \vee)$, wobei L eine Menge ist und $\vee$ eine binäre Operation, sodass für alle $x, y, z \in L$ gilt

- (H1) $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$, d.h. $\vee$ ist assoziativ
- (H2) $x \vee y = y \vee x$, d.h. $\vee$ ist kommutativ
- (H3) $x \vee x = x$

Nun können wir schon fast einen Vektorverband definieren. Bevor wir dazu kommen, müssen wir noch eine Relation definieren, die auch später noch oft vorkommen wird:

Bemerkung 1. Sei $(L, \vee)$ ein Halbverband. Wir definieren für $x, y \in L$

$$\mathbf{x} \leq \mathbf{y} : \Leftrightarrow x \vee y = y$$

Diese Relation gibt uns eine partielle Ordnung auf L , da

$$\begin{aligned} x \leq x, \quad & \text{da } x \vee x = x \\ x \leq y, y \leq x \Rightarrow x = y, \quad & \text{da } x = (y \vee x) \stackrel{(H2)}{=} (x \vee y) = y \\ x \leq y, y \leq z \Rightarrow x \leq z, \quad & \text{da } (x \vee z) = (x \vee y) \vee z = y \vee z = z \end{aligned}$$

Zudem gilt auch $x, y \leq x \vee y$ und aus $x \leq z, y \leq z$ folgt $x \vee y \leq z$ für alle $x, y, z \in L$. Insbesondere, können wir also $x \vee y$ als größte obere Schranke von $\{x, y\}$ bzgl. der partiellen Ordnung auf L betrachten.

Definition 1.2. Wir nennen einen linearen Raum L mit einer binären Operation $\vee$ einen **Vektorverband**, falls $(L, \vee)$ ein Halbverband ist und für $x, y, z \in L$ und $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

- (V1) $(x + z) \vee (y + z) = (x \vee y) + z$
- (V2) Für $a \geq 0$, ist $a(x \vee y) = (ax) \vee (ay)$
- (V3) Für $x \geq 0$, ist $(a \vee b)x = (ax) \vee (bx)$

Beispiel. Ein Halbverband auf den reellen Zahlen ist definiert durch

$$a \vee b := \max\{a, b\}$$

und ein Vektorverband ist gegeben auf $C_0(\mathbb{R})$, den gleichmäßig stetigen Funktionen $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger, durch

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (af)(x) = af(x), \quad (f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\}$$

für alle $f, g \in C_0(\mathbb{R})$ und $a \in \mathbb{R}$.

Wir können nun einige Eigenschaften eines Vektorverbandes zeigen.

Lemma 1.1. Sei $(L, \vee)$ ein Vektorverband, dann gilt für alle $x, y, z \in L$ und $a, b \in \mathbb{R}$

(i) falls $x \leq y$, dann $x + z \leq y + z$,

(ii) falls $x \leq y$ und $0 \leq a$, dann $ax \leq ay$,

(iii) falls $0 \leq x$ und $a \leq b$, dann $ax \leq bx$.

Beweis. Sei $x \leq y$, das heißt $x \vee y = y$, dann folgt $x + z \leq y + z$, denn

$$(x + z) \vee (y + z) \stackrel{(V1)}{=} (x \vee y) + z = y + z.$$

Angenommen wir haben zusätzlich $0 \leq a$, so folgt (ii) aus

$$ax \vee ay \stackrel{(V2)}{=} a(x \vee y) = ay,$$

Falls $0 \leq x$ und $a \leq b$, dann gilt (iii) da

$$ax \vee bx \stackrel{(V3)}{=} (a \vee b)x = bx.$$

□

Bevor wir uns weitere Eigenschaften eines Vektorverbandes anschauen, wollen wir noch einen anderen binären Operator definieren.

Definition 1.3. Sei $(L, \vee)$ ein Vektorverband. Wir definieren auf L einen weiteren binären Operator $\wedge: L \times L \rightarrow L$ durch

$$\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} := -(-x \vee -y)$$

für alle $x, y \in L$, wobei $-x = (-1) \cdot x$ ist.

Bemerkung 2. Ähnlich wie für $\vee$, kann man leicht sehen, dass $x \wedge y$ die größte untere Schranke von $\{x, y\}$ bzgl. der partiellen Ordnung auf L ist:

Ist $x \leq y$, so ist $-y = x - (x + y) \stackrel{\text{Lemma 1.1}}{\leq} y - (x + y) = -x$, also $x \wedge y = x$.

Insbesondere können wir hier auch sehen, dass $x \leq y \Leftrightarrow -y \leq -x$ gilt.

Bemerkung 3. Außerdem gilt für $x, y, z \in L$ auch folgende Aussage :

Angenommen $x \leq y, z$, d.h. $-y, -z \leq -x$, so gilt $x \leq y \wedge z$, denn

$$(-(y \wedge z)) \vee -x = (-y \vee -z) \vee -x = -y \vee (-z \vee -x) = -y \vee -x = -x$$

oder anders formuliert $x \leq y \wedge z$.

Für diesen Operator können wir nun ähnlich Eigenschaften zeigen wie für $\vee$.

Lemma 1.2. Sei $(L, \vee)$ ein Vektorverband und $\wedge$ wie oben definiert (auf L und entsprechend auf $\mathbb{R}$), dann gilt für alle $x, y, z \in L$ und $a, b \in \mathbb{R}$

- (i) $x + y = (x \vee y) + (x \wedge y)$,
- (ii) $(x + z) \wedge (y + z) = (x \wedge y) + z$,
- (iii) ist $0 \leq a$, dann $a(x \wedge y) = ax \wedge ay$,
- (iv) ist $0 \leq x$, dann $(a \wedge b)x = ax \wedge bx$.

Beweis. Die erste Aussage (i) folgt aus

$$(x \vee y) - (x + y) \stackrel{(V1)}{=} -y \vee -x \stackrel{(H2)}{=} -x \vee -y = -(x \wedge y).$$

Ähnlich folgt (ii) da

$$(x + z) \wedge (y + z) = -((-x - z) \vee (-y - z)) \stackrel{(V1)}{=} -((-x \vee -y) - z) = (x \wedge y) + z.$$

Angenommen $0 \leq a$, so gilt (iii), da für alle $x, y \in L$

$$a(x \wedge y) = -a(-x \vee -y) \stackrel{(V2)}{=} -(-ax \vee -ay) = ax \wedge ay.$$

Falls $a, b \in \mathbb{R}$ beliebig und $0 \leq x$, dann gilt

$$(a \wedge b)x = (-(-a \vee -b))x = -((-a \vee -b)x) \stackrel{(V3)}{=} -(-ax \vee -bx) = ax \wedge bx.$$

Somit haben wir alle vier Aussagen bewiesen. □

Bemerkung 4. Bevor wir zum nächsten Satz kommen, wollen wir noch kurz zwei nützliche Beobachtungen zu den zwei Operatoren machen. Für alle $x, y, z \in L$ gilt

- (1) falls $x \leq y$, dann $x \vee z \leq y \vee z$
- (2) falls $x \leq y$, dann $x \wedge z \leq y \wedge z$.

Dabei folgt (1) direkt aus der Definition von $\leq$ und von $\vee$. Aussage (2) erhalten wir, da für beliebige $x, y \in L$ gilt $x \leq y \Leftrightarrow -y \leq -x$ (siehe oben) und mit der Annahme $x \leq y$ folgt

$$-(y \wedge z) = -y \vee -z \stackrel{(1)}{\leq} -x \vee -z = -(x \wedge z)$$

d.h. also $x \wedge z \leq y \wedge z$.

Satz 1.3. Für einen Vektorverband $(L, \vee)$ mit $\wedge$ gilt für alle $x, y, z \in L$

$$(i) (x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z) \quad \text{und} \quad (ii) (x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z).$$

In anderen Worten, $(L, \vee, \wedge)$ ist distributiv

Beweis. (i): Wir wollen zuerst zeigen, dass $(x \vee y) \wedge z \leq (x \wedge z) \vee (y \wedge z) =: u$ gilt. Wir wissen bereits

$$x \wedge z \leq u \quad \text{and} \quad y \wedge z \leq u$$

also folgt mit Lemma 1.2 und Lemma 1.1

$$x + z = x \vee z + x \wedge z \leq x \vee z + u \quad \text{und analog} \quad y + z \leq y \vee z + u.$$

Somit können wir folgern

$$\begin{aligned} x \vee y + z &\stackrel{(V1)}{=} (x + z) \vee (y + z) \stackrel{\text{Bem. 4}}{\leq} (x \vee z + u) \vee (y \vee z + u) \\ &\stackrel{(V1, H2, H3)}{=} (x \vee y) \vee z + u \end{aligned}$$

und so folgt $(x \vee y) \wedge z = (x \vee y) + z - (x \vee y) \vee z \leq u$.

Des Weiteren wollen wir nun zeigen, dass $(x \wedge z) \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge z$ gilt. Es reicht hier nach *Bemerkung 1* zu zeigen, dass $x \wedge z, y \wedge z \leq (x \vee y) \wedge z$ ist.

Dies wiederum folgt wegen $x, y \leq x \vee y$ aus *Bemerkung 4 (2)*. Analog können wir (ii) zeigen. $\square$

Definition 1.4. Sei $(L, \vee)$ ein Vektorverbund, so definieren wir drei (unäre) Operatoren $(-)^+, (-)^-, |-|: L \rightarrow L$ durch

$$x^+ = x \vee 0 \quad x^- = (-x) \vee 0 \quad |x| = x \vee (-x)$$

für alle $x \in L$.

Bemerkung 5. Auch für diese Operatoren können wir beobachten:

$$0 \leq v \Leftrightarrow v = v^+ \quad \text{für } v \in L \text{ oder } \mathbb{R}$$

Somit können wir ersetzen:

$$(V2) \Leftrightarrow a^+(x \vee y) = (a^+x) \vee (a^+y)$$

$$(V3) \Leftrightarrow (a \vee b)x^+ = (ax^+) \vee (bx^+).$$

Außerdem gilt per Definition und wegen (H2): $|x| = |-x|$.

Lemma 1.4. Gegeben ein Vektorverband $(L, \vee)$, so gilt für alle $x, y, z \in L$ und $a \in \mathbb{R}$

$$(i) \quad x = x^+ - x^- \quad \text{und} \quad x^+ \wedge x^- = 0$$

$$(ii) \quad |x| = x^+ + x^- = x^+ \vee x^- \geq 0$$

$$(iii) \quad |x + y| \leq |x| + |y| \quad \text{und} \quad ||x| - |y|| \leq |x - y| \quad (\text{Dreiecksungleichungen})$$

$$(iv) \quad |ax| = |a||x|$$

$$(v) \quad |x \circ z - y \circ z| \leq |x - y| \quad \text{für } \circ \in \{\vee, \wedge\}$$

$$(vi) \quad \text{falls } 0 \leq x, y, \text{ dann } (x + y) \wedge |z| \leq x \wedge |z| + y \wedge |z|$$

(vii) falls $0 \leq x, y$, dann $|x \wedge z - y \wedge z| \leq |x - y| \wedge |z|$.

Beweis. (i) : Es gilt

$$x^- + x = (-x \vee 0) + x \stackrel{(V1)}{=} 0 \vee x \stackrel{(H2)}{=} x^+ \Rightarrow x^+ - x^- = x$$

und mit Lemma 1.2

$$x^+ \wedge x^- = (x + x^-) \wedge x^- = (x \wedge 0) + x^- = -(-x \vee 0) + (-x \vee 0) = 0$$

(ii) : Es folgt direkt mit Lemma 1.2

$$\begin{aligned} |x| &= -x \vee x = x + (-2x \vee 0) = x + 2x^- \\ &= x^+ + x^- \\ &= (x^+ \vee x^-) + (x^+ \wedge x^-) \\ &= (x^+ \vee x^-) \\ &\geq x^+ \geq 0 \end{aligned}$$

(iii) : Nach (i), (ii) folgt $0 \leq 2y^+ = |y| + y$ also gilt wegen $-x, x \leq |x|$ mit Lemma 1.1 ist

- $-x, x \leq |x| \leq |x| + |y| + y$,
- genauso wie $-y, y \leq |y| + |x| + x$.

Insgesamt folgt dann

$$-x - y, -x + y, x - y, x + y \leq |x| + |y|,$$

d.h. per Definition von $|-|$ folgt $|x + y|, |x - y| \leq |x| + |y|$. Daraus können wir nun auch die zweite Eigenschaft ableiten, denn

$$|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y|$$

und analog für x und y vertauscht, also gilt $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

(iv) : Durch (i) gilt

$$\begin{aligned} |a||x| &= |a|(x^+ + x^-) = |a|x^+ + |a|x^- \\ &= (a^+ + a^-)x^+ + (a^+ + a^-)x^- \\ &= a^+x^+ + a^-x^+ + a^+x^- + a^-x^- \end{aligned}$$

und durch (i) sowie durch (V1), (V2) gilt, da $0 \leq |a|$ ist

$$\begin{aligned} |a||x| &= |a|(x^+ \vee x^-) = |a|x^+ \vee |a|x^- \\ &= (a^+ \vee a^-)x^+ \vee (a^+ \vee a^-)x^- \\ &= a^+x^+ \vee a^-x^+ \vee a^+x^- \vee a^-x^-. \end{aligned}$$

Insbesondere wissen wir also

$$a^+x^+ \vee a^-x^+ \vee a^+x^- \vee a^-x^- = a^+x^+ + a^-x^+ + a^+x^- + a^-x^-. \quad (1)$$

Auf der anderen Seite wissen wir aus (ii), dass $|ax| = (ax)^+ + (ax)^-$ ist und bevor wir uns $(ax)^+$ und $(ax)^-$ genauer anschauen, können wir feststellen:

- $x^+, x^-, a^+, a^- \geq 0 \stackrel{\text{Lemma 1.1}}{\Rightarrow} a^t x^s \geq 0$ für alle $s, t \in \{+, -\}$
- mit Lemma 1.1 gilt $0 \leq a^+ x^+ \wedge a^- x^- \leq |a| x^+ \wedge |a| x^- = |a|(x^+ \wedge x^-) = 0$ und $0 \leq a^- x^+ \wedge a^+ x^- \leq |a|(x^+ \wedge x^-) = 0$
- also folgt mit Lemma 1.2, dass

$$a^+ x^+ + a^- x^- = a^+ x^+ \vee a^- x^- \quad \text{und} \quad a^- x^+ + a^+ x^- = a^- x^+ \vee a^+ x^- \quad (2)$$

Damit folgt für $(ax)^+$

$$\begin{aligned} (ax)^+ &= ax \vee 0 \stackrel{(i)}{=} (a^+ - a^-)(x^+ - x^-) \vee 0 \\ &= (a^+ x^+ + a^- x^- - a^- x^+ - a^+ x^-) \vee 0 \\ &\stackrel{(V1)}{=} (a^+ x^+ + a^- x^-) \vee (a^- x^+ + a^+ x^-) - (a^- x^+ + a^+ x^-) \\ &\stackrel{(2)}{=} (a^+ x^+ \vee a^- x^-) \vee (a^- x^+ \vee a^+ x^-) - (a^- x^+ + a^+ x^-) \\ &\stackrel{(1)}{=} a^+ x^+ + a^- x^+ + a^+ x^- + a^- x^- - (a^- x^+ + a^+ x^-) \\ &= a^+ x^+ + a^- x^- \end{aligned}$$

Ähnlich können wir zeigen $(ax)^- = a^- x^+ + a^+ x^-$ und so folgt

$$|ax| = a^+ x^+ + a^- x^+ + a^+ x^- + a^- x^- = |a||x|.$$

(v) : Wir haben schon gesehen, dass $x - y \leq |x - y|$ und $0 \leq |x - y|$. Damit und durch Lemma 1.1 folgt

$$\begin{aligned} x &\leq x - y + y \leq |x - y| + y \stackrel{y \leq y \vee z}{\leq} |x - y| + y \vee z \\ z &\leq y \vee z \stackrel{0 \leq |x - y|}{\leq} |x - y| + y \vee z \end{aligned}$$

Mit *Bemerkung 1* folgt somit also $x \vee z \leq |x - y| + y \vee z$. Analog können wir zeigen, dass $y \vee z \leq |x - y| + x \vee z$ und somit $|x \vee z - y \vee z| \leq |x - y|$.

Für $\wedge$ gilt

$$x \wedge z \leq x \leq |x - y| + y \quad \text{und} \quad x \wedge z \leq z \stackrel{0 \leq |x - y|}{\leq} |x - y| + z$$

dass heißt mit *Bemerkung 3* erhalten wir

$$\begin{aligned} x \wedge z &\leq (|x - y| + y) \wedge (|x - y| + z) \stackrel{\text{Lemma 1.2}}{=} |x - y| + y \wedge z \\ &\Leftrightarrow \\ &x \wedge z - y \wedge z \leq |x - y| \end{aligned}$$

Auch hier können wir analog $y \wedge z - x \wedge z \leq |x - y|$ zeigen und erhalten damit die gewünschte Aussage.

(vi) : Angenommen $0 \leq x, y$. Es gilt mit Lemma 1.1

$$(x + y) \wedge |z| \leq x + y \quad \text{und} \quad (x + y) \wedge |z| \leq |z| \leq |z| + y$$

somit also mit *Bemerkung 3*

$$(x + y) \wedge |z| \leq (x + y) \wedge (|z| + y) \stackrel{\text{Lemma 1.2}}{=} (x \wedge |z|) + y. \quad (3)$$

Abgesehen davon folgt wegen $0 \leq x \wedge |z|$

$$(x + y) \wedge |z| \leq |z| \leq x \wedge |z| + |z|.$$

Dies ergibt zusammen mit (3) und *Bemerkung 3*

$$(x + y) \wedge |z| \leq x \wedge |z| + y \wedge |z|.$$

Es lässt sich wieder analog zeigen, dass $y \wedge z - x \wedge z \leq x \wedge |z| + y \wedge |z|$, wodurch wir das gewünschte Resultat erhalten.

(vii) : Angenommen $0 \leq x, y$. Um $|x \wedge z - y \wedge z| \leq |x - y| \wedge |z|$ zu zeigen, reicht es wegen *Bemerkung 3* die folgenden Gleichungen zu beweisen

$$|x \wedge z - y \wedge z| \leq |x - y| \quad (4)$$

$$|x \wedge z - y \wedge z| \leq |z| \quad (5)$$

Wir haben in (v) bereits (4) gezeigt und (5) folgt genau dann, wenn $x \wedge z - y \wedge z \leq |z|$ und $y \wedge z - x \wedge z \leq |z|$ gilt (per Definition von $|-|$). Wir beobachten, dass $x \wedge z \leq z \leq |z| + z$ und $x \wedge z \leq z \leq |z| \leq |z| + y$ durch unsere Annahme. Somit folgt via *Bemerkung 3*

$$x \wedge z \leq (|z| + y) \wedge (|z| + z) \stackrel{\text{Lemma 1.2}}{=} |z| + y \wedge z$$

$$\Rightarrow x \wedge z - y \wedge z \leq |z|$$

Auch hier können wir genauso zeigen, dass $y \wedge z - x \wedge z \leq |z|$ gilt und erhalten (vii). $\square$