Reihen

13.11.2024

1 Reihen Allgemein

Um über Reihen zu reden, sollten wir sie zunächst erst mal definieren. Eine normale Definition für Reihen könnte folgendermaßen aussehen:

Definition 1.1 (Reihen)**.**
Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Die zugehörige Reihe $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert sich dann durch:

$$(s_n)_{n\in\mathbb{N}} := (\sum_{m=0}^{n} x_m)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Häufig wird sowohl die Reihe als auch ein potentiell existentes Limit der Reihe mit

$$\sum_{m=0}^{\infty} x_m$$

bezeichnet. Welches der beiden gemeint ist ergibt sich meistens auch dem Kontext.

Für Reihen, wie oben definiert, ist der Konvergenz-Begriff einfach, da sie einfach nur spezielle folgen sind. Für die Behandelung in Minlog ist es aber zweckmäßig einen anderen Weg zu gehen. Hier ist die Konvergenz für Reihen als separate Prädikate (RSerConv und RealSerConv) definiert.
RSerConv hat dabei die Funktion die rein arithmetischen Bedingungen für die Konvergenz zu prüfen. RealSerConv fügt dann noch weitere notwendige Bedingungen für einen sinnvollen Konvergenz-Begriff hinzu, nämlich dass die Folgenglieder tatsächlich reelle Zahlen sind und dass der Modul tatsächlich Monoton ist.

Definition 1.2 (RSerConv).

```
(add-ids
  (list
    (list "RSerConv"
      (make-arity
        (py "nat=>rea")
        (py "pos=>nat")
      )
    )
  )
  '("all xs,M
    (all p,n,m
      (M p<=n -> abs(RealSum n m xs)«=(1#2**p)) ->
        RSerConv xs M
    )"
    "RSerConvIntro"
  )
)
```

Definition 1.3 (RealSerConv).

```
(add-ids
  (list
    (list "RealSerConvLim"
      (make-arity
        (py "nat=>rea")
        (py "pos=>nat")
      )
    )
  )
  '("all xs,M
    (all n Real(xs n) ->
      Mon M ->
        RSerConv xs M ->
          RealSerConv xs M
    )"
    "RealSerConvIntro"
  )
)
```

Bemerkung 1.4 (Cauchy-Kriterium).
Diese Definitionen entsprechen genau dem Cauchy-Kriterium für die Konvergenz von Reihen, welches lautet:
Eine Reihe $\sum_{m=0}^{\infty} x_n$ konvergiert genau dann, wenn

$$\forall_{p\in\mathbb{Z}^+}\exists_{N\in\mathbb{N}}\forall_{n,m\in\mathbb{N}}(n \geq m \geq N \implies |\sum_{\nu=m}^{n} x_\nu| \leq \frac{1}{2^p}).$$

Somit benutzen wir statt dem regulären Konvergenz-Begriff das Cauchy-Kriterium als Definition. Wobei das N in der Existenzaussage genau durch den Modul M geben ist.

Neben der regulären Konvergenz von Reihen gibt es noch den sehr wichtigen Begriff der absoluten Konvergenz. Dieser definiert sich wie folgt:

Definition 1.5 (Absolute Konvergenz)**.**
Eine Reihe $\sum_{m=0}^{\infty} x_m$ heißt absolut konvergent, falls

$$\sum_{m=0}^{\infty} |x_m|$$

konvergent ist.

Für die absolute Konvergenz wird in Minlog kein weiteres induktives Prädikat definiert. Es wird bei den vorherigen Konvergenz-Begriffen einfach ein Absolutbetrag zwischen die Folge und das Prädikat geschaltet. Die absolute Konvergenz von xs mit Modul M ist also durch

$$RealSerConv([n]abs(xs\ n))M$$

gegeben.

2 Die Exponentialreihe

Als nächstes kommen wir zur Exponentialreihe. Unser Ziel hier ist in Minlog zu zeigen, dass die Exponentialreihe absolut konvergiert. Dabei werden wir dann auch Aussagen über den Modul der Konvergenz treffen. Erstmal wollen wir hierfür die Exponentialreihe definieren:

Definition 2.1 (Die Exponentialreihe)**.**
Die Exponentialreihe ist für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert durch

$$\exp(x) := \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!}.$$

Wie gesagt wollen wir zeigen, dass die Exponentialreihe absolut konvergiert. Erstmal schauen wir uns hierfür einen Normalen Beweis für diese Aussage an:

Satz 2.2 (Die Exponentialreihe konvergiert Absolut)**.**
Es gilt, dass

$$\forall_{x \in \mathbb{R}} \exp(x)\ konvergiert\ absolut.$$

Beweis.
Sei $x \in \mathbb{R}$. Sei $n \in \mathbb{N}$, so dass $2|x| \leq n + 1$. Weiter gilt

$$2|x| \leq n+1 \iff \frac{2|x|}{(n+1)!} \leq \frac{1}{n!},$$

$$\frac{2|x|}{(n+1)!} \leq \frac{1}{n!} \iff \frac{2|x^{n+1}|}{(n+1)!} \leq \frac{|x^n|}{n!},$$

$$\frac{2|x^{n+1}|}{(n+1)!} \leq \frac{|x^n|}{n!} \iff \frac{|x^{n+1}|}{(n+1)!} \leq \frac{1}{2}\frac{|x^n|}{n!}$$

und

$$\frac{|x^{n+1}|}{(n+1)!} \leq \frac{1}{2}\frac{|x^n|}{n!} \iff \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right| \leq \frac{1}{2}\left|\frac{x^n}{n!}\right|.$$

Somit folgt dann

$$\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right| \leq \frac{1}{2}\left|\frac{x^n}{n!}\right|.$$

Nach dem Quotientenkriterium ist $\exp(x)$ somit absolut konvergent. $\square$

Jetzt wo wir diesen Beweis betrachtet haben, ist das nächste Ziel die Formalisierung in Minlog und damit die Frage wie wir das machen.
Die Antwort: In Minlog zeigen wir die absolute Konvergenz der Exponentialreihe mit den Sätzen RealESerAbsConvAux und RealESerAbsConv. Für RealESerAbsConvAux brauchen wir aber ein zuerst vier Lemma, welche wir zuerst behandeln:

Lemma 2.3 (lemma1)**.**

```
(set-goal
  ″all x,n
    (Real x ->
      0«=(1#PosF n)*abs x**n
    )
  ″
)
```

Lemma1 sagt aus, dass alle Summanden der Exponentialreihe für den Absolutbetrag einer reellen Zahl nicht-negativ sind.

Beweis.
In Minlog. □

Lemma 2.4 (lemma2)**.**

```
(set-goal
  ″all x,n
    (Real x ->
      abs x«=RealTimes(1#2)(cNatPos(Succ n)) ->
        (1#PosF(Succ n))*abs x**Succ n«=(1#2)*((1#PosF n)*abs x**n)
    )
  ″
)
```

Lemma2 sagt aus, dass der Succ(n)te Summand der Exponentialreihe um den Faktor $\frac{1}{2}$ kleiner ist, als der nte Summand.

Beweis.
In Minlog. □

Lemma 2.5 (lemma3)**.**

```
(set-goal
  ″all x,l
    (Real x ->
      2*abs x«=Succ l ->
        all n (1#PosF(l+n))*abs x**(l+n)«=(1#2)**n*((1#PosF l)*abs x**l)
    )
  ″
)
```

Lemma3 verallgemeinert die Aussage von lemma2, von Nachfolgern zu Summen.

Beweis.
In Minlog. □

Lemma 2.6 (lemma4)**.**

```
(set-goal
  "all xs,n,m
    (all n0 0«=xs n0 ->
      all n0 xs(n+n0)«=(1#2)**n0*xs n ->
        RealSum n m xs«=2*xs n
    )
  "
)
```

Lemma4 ist effektiv eine Version des Quotientenkriteriums.

Beweis.
In Minlog. □

Mit diesen Lemmas lässt sich dann RealESerAbsConvAux zeigen. RealESerAbsConvAux sagt uns dann effektiv, dass die Voraussetzung für Konvergenz von Reihen in RSerConv für die Exponentialreihe gilt. Das benutzen wir dann um RealESerAbsConv zu zeigen, was die eigentliche Konvergenzaussage ist.

Satz 2.7 (RealESerAbsConvAux)**.**

```
(set-goal
  "all x,xs,l,q,p,n,m
    (Real x ->
      all n0 xs n0===(1#PosF n0)*abs x**n0 ->
        2*abs x«=Succ l ->
          xs l«=2**q ->
            PosS(q+p)+l<=n ->
              RealSum n m xs«=(1#2)**p
    )
  "
)
```

Beweis.
In Minlog. □

Mit all dieser Arbeit gemacht, schauen wir uns jetzt RealESerAbsConv an. Dies sagt uns, dass die unter sehr allgemeinen Bedingungen, dass die Exponentialreihe absolut konvergiert und wie ihr Modul aussieht.

Satz 2.8 (RealESerAbsConv)**.**

```
(set-goal
  "all x,l,q,xs,M
    (Real x ->
      2*abs x«=Succ l ->
        xs l«=2**q ->
          all n xs n===(1#PosF n)*abs x**n ->
            all p M p=PosS(q+p)+l ->
              RealSerConv xs M
    )
  "
)
```

Beweis.
In Minlog. □

Somit stellen wir fest, die Exponentialreihe konvergiert. Weiter Aussagen und Beweise über die Exponentialreihe und Reihen allgemein finden sich in rseq.scm und examplesanalysis-eser2.scm.