Mathematisches Institut
der Universität München
Helmut Schwichtenberg

Wintersemester 2007/2008
Blatt 12

Übungen zur Vorlesung
„Elemente der Zahlentheorie, Aufbau des Zahlensystems“

Aufgabe 45. Seien $x, y, z \in \mathbf{Z}$ und x gerade, y ungerade.

(a) Man zeige: (x, y, z) ist primitive Lösung von $x^2 + y^2 = z^2$ genau dann, wenn es $u, v \in \mathbf{Z}$ mit $0 < v < u$ gibt so daß $u \not\equiv v \mod 2$, $\mathrm{ggT}(u, v) = 1$ und
$$x = 2uv, \quad y = u^2 - v^2, \quad z = u^2 + v^2.$$
(b) Man gebe vier primitive Lösungen von $x^2 + y^2 = z^2$ an.

Aufgabe 46. Sei A Integritätsbereich und $\mathrm{Nneg} \subseteq A$. Für alle $x, y \in A$ gelte

(a) $x, y \in \mathrm{Nneg} \to x + y, xy \in \mathrm{Nneg}$.
(b) $x \in \mathrm{Nneg} \vee -x \in \mathrm{Nneg}$.
(c) $x \in \mathrm{Nneg} \to -x \in \mathrm{Nneg} \to x = 0$.

Man zeige: Definiert man $x \le y$ durch $y - x \in \mathrm{Nneg}$, so ist $(A, +, \cdot, \le)$ ein geordneter Integritätsbereich (mit $A^{0+} = \mathrm{Nneg}$).

Aufgabe 47. Seien K ein Körper und $\xi \in K$ kein Quadrat in K (d.h. es gibt kein $x \in K$ mit $x^2 = \xi$). Auf $K \times K$ definieren wir
$$\begin{aligned}(x, y) + (x', y') &:= (x + x', y + y'),\\ (x, y) \cdot (x', y') &:= (xx' + yy'\xi, xy' + yx').\end{aligned}$$
Man zeige, daß $K \times K$ mit dieser Addition $+$ und Multiplikation $\cdot$ zu einem Körper wird. Die übliche Bezeichnung ist $(K(\sqrt{\xi}), +, \cdot)$ oder kurz $K(\sqrt{\xi})$.

Aufgabe 48. Man zeige:

(a) Mit x, y ist auch $x + y$ eine reelle Zahl.
(b) Die Funktion $x + y$ ist verträglich mit der Gleichheit.

Abgabe. Montag, 4. Februar 2008, 10:15 Uhr, Briefkasten im 1. Stock