Mathematisches Institut
der Universität München
Helmut Schwichtenberg

Wintersemester 2007/2008
Blatt 11

## Übungen zur Vorlesung „Elemente der Zahlentheorie, Aufbau des Zahlensystems“

**Aufgabe 41.** Man berechne die Anzahl der primen Reste modulo 99, 100, 101 und 6615.

**Aufgabe 42.** Man zeige für $p \in \mathbf{N}$, $p \geq 2$: Ist $(p-1)! \equiv -1 \mod p$, so ist $p$ eine Primzahl.

**Aufgabe 43.** Eine Lösung $(x, y, z)$ in $\mathbf{Z}$ von $x^2 + y^2 = z^2$ heißt *primitiv*, wenn $\mathrm{ggT}(x, y) = 1$. Man zeige:

(a) Zu jeder Lösung $(x, y, z)$ von $x^2 + y^2 = z^2$ gibt es eine primitive Lösung $(x_1, y_1, z_1)$ und ein $d \in \mathbf{Z}$ so daß $x = x_1 d$, $y = y_1 d$, $z = z_1 d$.
(b) Ist $(x, y, z)$ primitive Lösung von $x^2 + y^2 = z^2$, so ist $x \not\equiv y \mod 2$.

**Aufgabe 44.** Sei $A$ geordneter Integritätsbereich, $A^{0+} := \{ x \in A \mid 0 \leq x \}$. Man zeige, daß für alle $x, y \in A$ gilt

(a) $x \leq y \leftrightarrow y - x \in A^{0+}$.
(b) $x, y \in A^{0+} \to x + y, xy \in A^{0+}$.
(c) $x \in A^{0+} \vee -x \in A^{0+}$.
(d) $x \in A^{0+} \to -x \in A^{0+} \to x = 0$.
(e) $x^2 \in A^{0+}$.
(f) $1 \in A^{0+}$.

**Abgabe.** Montag, 28. Januar 2008, 10:15 Uhr, Briefkasten im 1. Stock