

**Übungen zur Vorlesung
„Elemente der Zahlentheorie, Aufbau des Zahlensystems“**

Aufgabe 37. Für $a, b \in \mathbf{Z}$ und $k \in \mathbf{N}$ zeige man

(a)

$$(a - b) \sum_{i=0}^k a^{k-i} b^i = a^{k+1} - b^{k+1}.$$

(b) $a \equiv b \pmod{m} \rightarrow a^{k+1} \equiv b^{k+1} \pmod{m}$.

Aufgabe 38. (a) Man bestimme den Rest von 3^{100} bei Division durch 8.

(b) Man bestimme den Rest von $6!$ bei Division durch 7 und von $7!$ bei Division durch 8.

(c) Sei $n \in \mathbf{N}$. Man bestimme den Rest von $n!$ bei der Division durch $n + 1$, falls $n + 1$ keine Primzahl ist.

Aufgabe 39. Sei $m_1 := 7$, $m_2 := 8$, $m_3 := 9$. Man löse die Kongruenzsysteme

(a) $x \equiv 2 \pmod{7}$, $x \equiv 4 \pmod{8}$, $x \equiv 1 \pmod{9}$,

(b) $x \equiv 5 \pmod{7}$, $x \equiv 1 \pmod{8}$, $x \equiv 3 \pmod{9}$.

Aufgabe 40. Sei A ein Integritätsbereich und $a, b \in A$. Dann gilt $(a) = (b)$ genau dann, wenn es ein $u \in A^*$ gibt mit $a = ub$.

Abgabe. Montag, 21. Januar 2008, 10:15 Uhr, Briefkasten im 1. Stock