Mathematisches Institut
der Universität München
Helmut Schwichtenberg

Wintersemester 2007/2008
Blatt 9

**Übungen zur Vorlesung
„Elemente der Zahlentheorie, Aufbau des Zahlensystems"**

Aufgabe 33. Es sei R ein kommutativer Ring mit 1. Man zeige, daß für alle $x, y, z, w \in R$ gilt:
(a) $x - y = z - w$ genau dann, wenn $x + w = z + y$.
(b) $(x - y) + (z - w) = (x + z) - (y + w)$
(c) $(x - y) - (z - w) = (x + w) - (y + z)$
(d) $(x - y) \cdot (z - w) = (x \cdot z + y \cdot w) - (y \cdot z + x \cdot w)$

Aufgabe 34. Seien A, B kommutative Ringe mit 1 und $f\colon A \to B$ Ringhomomorphismus. Man zeige
(a) Wenn $\mathfrak{b} \subseteq B$ Ideal von B ist, so ist auch $f^{-1}(\mathfrak{b})$ Ideal von A.
(b) Ist $\mathfrak{a} \subseteq A$ Ideal von A und f surjektiv, so ist auch $f(\mathfrak{a})$ Ideal von B.

Aufgabe 35. Ein Ideal $\mathfrak{p} \subseteq A$ mit $\mathfrak{p} \neq A$ heißt *Primideal*, wenn für alle $x, y \in A$ gilt

Aus $xy \in \mathfrak{p}$ folgt $x \in \mathfrak{p}$ oder $y \in \mathfrak{p}$.

(a) Sei $\mathfrak{p} \subseteq A$ ein Ideal mit $\mathfrak{p} \neq A$. Man zeige:

$\mathfrak{p}$ ist Primideal genau dann, wenn $A/\mathfrak{p}$ ein Integritätsring ist.

(b) Sei $A = \mathbf{Z}$, $\mathfrak{p} = p\mathbf{Z}$ mit $p \in \mathbf{N}$, $p \geq 2$. Man zeige, daß $p\mathbf{Z}$ genau dann ein Primideal ist, wenn p Primzahl ist.

Aufgabe 36. Man zeige
(a) Für $a, b \in \mathbf{Z}$ und $m \in \mathbf{N}$, $m > 0$ sind äquivalent
 (i) a und b haben denselben Rest bei der Division durch m.
 (ii) $m \mid a - b$.
 Bezeichnung: $a \equiv b \mod m$ (oder $a \equiv b(m)$ oder $a \equiv_m b$); „a ist kongruent zu b modulo m".
(b) Für $a, b, c, d \in \mathbf{Z}$ und $m \in \mathbf{N}$, $m > 0$ gelte $a \equiv b \mod m$ und $c \equiv d \mod m$. Man zeige
 (i) $a + c \equiv b + d \mod m$,
 (ii) $-a \equiv -b \mod m$,
 (iii) $ac \equiv bd \mod m$.

Abgabe. Montag, 14. Januar 2008, 10:15 Uhr, Briefkasten im 1. Stock