

**Übungen zur Vorlesung**  
**„Elemente der Zahlentheorie, Aufbau des Zahlensystems“**

**Aufgabe 29.** Sei  $G = \{g_1, \dots, g_n\}$  eine endliche Gruppe. Die Multiplikation kann man in einer Gruppentafel explizit aufschreiben:

$\cdot$	$g_1$	$g_2$	$\cdots$	$g_n$
$g_1$	$g_1 g_1$	$g_1 g_2$	$\cdots$	$g_1 g_n$
$g_2$	$g_2 g_1$	$g_2 g_2$	$\cdots$	$g_2 g_n$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$g_n$	$g_n g_1$	$g_n g_2$	$\cdots$	$g_n g_n$

- (a) Man zeige, daß in jeder Zeile und in jeder Spalte jedes Element von  $G$  genau einmal vorkommt.
- (b) Wie findet man in der Gruppentafel schnell das Inverse eines Elements?
- (c) Was bedeutet es für die Gruppentafel, daß  $G$  abelsch ist?
- (d) Man gebe die Gruppentafel für  $\mathbf{Z}_6$  an.

**Aufgabe 30.** Sei  $G$  eine Gruppe,  $M \subseteq G$  eine Teilmenge und

$$\langle M \rangle := \{ x \in G \mid \exists n \in \mathbf{N}, x_1, \dots, x_n \in M, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{1, -1\} \ x = x_1^{\varepsilon_1} \cdots x_n^{\varepsilon_n} \}.$$

Man zeige, daß  $\langle M \rangle$  die kleinste Untergruppe von  $G$  ist, die  $M$  enthält.

**Aufgabe 31.** Sei  $G$  eine zyklische Gruppe. Man zeige:

- (a) Ist  $G$  unendlich, so gibt es genau zwei Elemente  $x, y \in G$  mit  $G = \langle x \rangle$  und  $G = \langle y \rangle$ .
- (b) Ist  $|G| = n$  und  $G = \langle x \rangle$ , so besteht die Menge der  $y \in G$  mit  $G = \langle y \rangle$  aus Potenzen  $x^k$  von  $x$ , für die  $k$  teilerfremd zu  $n$  ist.

**Aufgabe 32.** Seien  $G_1, G_2$  Gruppen. Auf  $G_1 \times G_2$  definiert man eine Verknüpfung durch  $(x_1, x_2) \circ (y_1, y_2) := (x_1 y_1, x_2 y_2)$ .

- (a) Man zeige, daß  $(G_1 \times G_2, \circ)$  eine Gruppe ist.
- (b) Man zeige, daß die Projektionen  $p_i: G_1 \times G_2 \rightarrow G_i$ ,  $p_i(x_1, x_2) := x_i$  für  $i = 1, 2$  Homomorphismen sind.
- (c) Sei noch  $H$  eine Gruppe und  $f_i: H \rightarrow G_i$  Homomorphismen. Man zeige, daß es genau einen Homomorphismus  $f_1 \times f_2: H \rightarrow G_1 \times G_2$  gibt mit

$$p_i \circ (f_1 \times f_2) = f_i \quad \text{für } i = 1, 2.$$

Wir wünschen Ihnen erholsame Weihnachtsferien und ein gutes Neues Jahr!

**Abgabe.** Montag, 7. Januar 2008, 10:15 Uhr, Briefkasten im 1. Stock