Mathematisches Institut
der Universität München
Helmut Schwichtenberg

Wintersemester 2007/2008
Blatt 7

Übungen zur Vorlesung
„Elemente der Zahlentheorie, Aufbau des Zahlensystems“

Aufgabe 25. Man berechne die größten gemeinsamen Teiler von 1960 und 252, und auch von 165 und 182, und zwar
(a) nach dem euklidischen Algorithmus, und
(b) durch Primfaktorzerlegung.

Aufgabe 26. Man zeige durch vollständige Induktion
(a) $\forall_n \exists_m (n = 2m \vee n = 2m + 1)$.
(b) die Irrationalität von $\sqrt{2}$, d.h.

$$\forall_n \forall_m \, (n+1)^2 \neq 2(m+1)^2.$$

Hinweis. Man verwende eine Wertverlaufsinduktion nach n.

Aufgabe 27. Durch Induktion über den Typ **P** der positiven Binärzahlen, also mit dem Schema

$$\mathrm{Ind}_{q,A} \colon \forall_q \big(A(1) \to \forall_p (A(p) \to A(S_0 p)) \to \forall_p (A(p) \to A(S_1 p)) \to A(q^{\mathbf{P}}) \big),$$

beweise man für die in der Vorlesung definierte Addition und Multiplikation, daß für alle p des Typs **P** gilt
(a) $1 \cdot p = p$;
(b) $p + p = S_0 p$.

Aufgabe 28. Es sei G eine Gruppe. Gegeben seien ein $a \in G$ und eine natürliche Zahl m mit (i) $a^m = e$ und (ii) $a^i \neq e$ für $1 \leq i < m$. Man zeige
(a) $\forall_{i,j} (0 \leq i < j < m \to a^i \neq a^j)$.
(b) $\forall_n \exists_i (0 \leq i < m \wedge a^n = a^i)$.

Abgabe. Montag, 10. Dezember 2007, 10:15 Uhr, Briefkasten im 1. Stock