Mathematisches Institut
der Universität München
Helmut Schwichtenberg

Wintersemester 2007/2008
Blatt 6

Übungen zur Vorlesung
„Elemente der Zahlentheorie, Aufbau des Zahlensystems“

Aufgabe 21. (a) Unter alleiniger Verwendung der Teilbarkeitsrelation formalisiere man die Eigenschaft einer natürlichen Zahl d, der größte gemeinsame Teiler zweier natürlicher Zahlen n, m zu sein.
(b) Entsprechend formalisiere man die Eigenschaft einer natürlichen Zahl k, das kleinste gemeinsame Vielfache zweier natürlicher Zahlen n, m zu sein.
(c) Man beweise: Zu beliebigen natürlichen Zahlen n, m gibt es höchstens ein kleinstes gemeinsames Vielfaches k.

Aufgabe 22. Man gebe Herleitungen der folgenden Formeln an:
(a) $\neg\exists_x A \to \forall_x \neg A$,
(b) $\forall_x \neg A \to \neg\exists_x A$.
Hinweis: Man verwende die Einführungs- bzw. Beseitigungsregel

$$\dfrac{r \qquad \begin{matrix} \mid M \\ A(r) \end{matrix}}{\exists_x A(x)}\ \exists^+ \qquad\qquad \dfrac{\begin{matrix} \mid M \\ \exists_x A \end{matrix} \qquad \begin{matrix} [u\colon A] \\ \mid N \\ B \end{matrix}}{B}\ \exists^- x, u \text{ (mit Variablenbedingung)}$$

Variablenbedingung: Die Herleitung N darf keine offenen Annahmen außer $u\colon A$ enthalten, in denen x frei vorkommtt, und auch in B darf x nicht frei vorkommen.

Aufgabe 23. Die Potenzfunktion hatten wir definiert durch die Berechnungsregeln $n^0 := 1$, $n^{\mathrm{S}m} := (n^m) \cdot n$. Man beweise
(a) $1^m = 1$,
(b) $(n \cdot m)^k = n^k \cdot m^k$,
(c) $(n^m)^k = n^{m \cdot k}$.

Aufgabe 24. Sei f eine Variable vom Typ $\mathbf{N} \to \mathbf{N}$.
(a) Man definiere durch Angabe der Berechnungsregeln Funktionen $\sum$ und $\prod$ vom Typ $\mathbf{N} \to (\mathbf{N} \to \mathbf{N}) \to \mathbf{N}$ mit

$$\sum nf = \sum_{i<n} fi, \qquad \prod nf = \prod_{i<n} fi.$$

(b) Sei $h\colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ definiert durch $hn := n$. Man beweise

$$2 \cdot (\sum nh) = n \cdot (n+1).$$

Abgabe. Montag, 3. Dezember 2007, 10:15 Uhr, Briefkasten im 1. Stock