Mathematisches Institut
der Universität München
Helmut Schwichtenberg

Wintersemester 2007/2008
Blatt 5

Übungen zur Vorlesung „Elemente der Zahlentheorie, Aufbau des Zahlensystems“

Aufgabe 17. Man leite aus den Annahmen

(a) u_1: $U(a,a) \lor U(b,a) \lor U(c,a)$ (Agatha, der Butler oder Charles haben Agatha umgebracht),
(b) u_2: $\forall_{x,y}\,(U(x,y) \to H(x,y) \land \neg R(x,y))$ (Man bringt nur solche Personen um, die man haßt und die man an Reichtum nicht übertrifft),
(c) u_3: $\forall_x\,(H(a,x) \to \neg H(c,x))$ (Charles mag (= haßt nicht) alle Personen, die Agatha haßt),
(d) u_4: $H(a,a) \land H(a,c)$ (Agatha haßt sich selbst und Charles),
(e) u_5: $\forall_x\,(\neg R(x,a) \to H(b,x))$ (Der Butler haßt alle Personen, die nicht reicher sind als Agatha),
(f) u_6: $\forall_x\,(H(a,x) \to H(b,x))$ (Jeden, den Agatha haßt, haßt auch der Butler),
(g) u_7: $\neg\exists_x(H(x,a) \land H(x,b) \land H(x,c))$ (Niemand haßt sowohl Agatha als auch den Butler als auch Charles)

die Formeln (1) $\neg U(c,a)$ und (2) $\neg U(b,a)$ her.

Aufgabe 18. Man gebe Herleitungen der folgenden Formeln an:

(a) $(A \to B) \to \neg B \to \neg A$,
(b) $(\neg\neg B \to B) \to (\neg B \to \neg A) \to A \to B$.

Aufgabe 19. Die Multiplikation für natürliche Zahlen war definiert durch

$$n \cdot 0 := 0, \quad n \cdot \mathrm{S}m := (n \cdot m) + n.$$

Man beweise durch Induktion

(a) $0 \cdot n = 0$,
(b) $\mathrm{S}n \cdot m = (n \cdot m) + m$.

Aufgabe 20. Aus den Definitionen von $<$ und $\leq$, also den Berechnungsregeln

$$(n < 0) := \mathsf{ff}, \quad (0 < \mathrm{S}m) := \mathsf{tt}, \quad (\mathrm{S}n < \mathrm{S}m) := (n < m),$$
$$(0 \leq m) := \mathsf{tt}, \quad (\mathrm{S}n \leq 0) := \mathsf{ff}, \quad (\mathrm{S}n \leq \mathrm{S}m) := (n \leq m)$$

beweise man durch geeignete Induktionen

(a) $(n < n) = \mathsf{ff}$,
(b) $(n \leq n) = \mathsf{tt}$,
(c) $n < \mathrm{S}m \to n \leq m$,
(d) $n \leq m \to n < \mathrm{S}m$.

Abgabe. Montag, 26. November 2007, 10:15 Uhr, Briefkasten im 1. Stock