Mathematisches Institut
der Universität München
Helmut Schwichtenberg

Wintersemester 2007/2008
Blatt 3

Übungen zur Vorlesung „Elemente der Zahlentheorie, Aufbau des Zahlensystems“

Aufgabe 9. Man formalisiere folgende Aussagen ($\forall_x$: für alle Personen x; a: Agatha; b: Butler; c: Charles; $U(x, y)$: x hat y umgebracht; $R(x, y)$: x ist reicher als y; $H(x, y)$: x haßt y).

(a) Agatha, der Butler oder Charles haben Agatha umgebracht.
(b) Man bringt nur solche Personen um, die man haßt und die man an Reichtum nicht übertrifft.
(c) Charles mag (:= haßt nicht) alle Personen, die Agatha haßt.

Aufgabe 10. Man beweise die Isomorphie der Strukturen $\langle M_1, =, \cdot\rangle$ und $\langle M_2, =, +\rangle$, wobei

$$M_1 := \{\, n \mid \exists_m\, n = 2^m \,\}, \qquad M_2 := \{\, n \mid \exists_m\, n = 3 \cdot m \,\}.$$

$+, \cdot$ sind die üblichen Funktionen auf $\mathbf{N}$ eingeschränkt auf M_1 bzw. M_2.

Aufgabe 11. Man gebe Herleitungen der folgenden Formeln an:

(a) $A \to B \to A$,
(b) $(A \to B \to C) \to B \to A \to C$,
(c) $\forall_x \forall_y A \to \forall_y \forall_x A$,
(d) $\forall_x \forall_y A(x, y) \to \forall_x A(x, x)$.

Aufgabe 12. Man zeige, daß jede symmetrische und transitive Relation reflexiv ist, und zwar durch Angabe einer Herleitung der Formel

$$\begin{aligned}&\forall_x \forall_y \bigl(A(x, y) \to A(y, x)\bigr) \to \\ &\forall_x \forall_y \forall_z \bigl(A(x, y) \to A(y, z) \to A(x, z)\bigr) \to \\ &\forall_x A(x, x).\end{aligned}$$

Korrektur zu Aufgabe 12. Man zeige, daß jede symmetrische und transitive Relation reflexiv *auf ihrem Feld* ist, und zwar durch Angabe einer Herleitung der Formel

$$\begin{aligned}&\forall_x \forall_y \bigl(A(x, y) \to A(y, x)\bigr) \to \\ &\forall_x \forall_y \forall_z \bigl(A(x, y) \to A(y, z) \to A(x, z)\bigr) \to \\ &\forall_{x, y_0} (A(x, y_0) \to A(x, x)).\end{aligned}$$

Abgabe. Montag, 12. November 2007, 10:15 Uhr, Briefkasten im 1. Stock