Mathematisches Institut
der Universität München
Helmut Schwichtenberg

Wintersemester 2007/2008
Blatt 2

Übungen zur Vorlesung
„Elemente der Zahlentheorie, Aufbau des Zahlensystems“

Aufgabe 5. Man formalisiere die folgenden Aussagen.
(a) Es gibt eine Funktion $f\colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ ohne Nullstellen.
(b) Zu je zwei Funktionen $f, g\colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ gibt es eine Funktion $h\colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, deren Nullstellen genau die gemeinsamen Nullstellen von f und von g sind.

Aufgabe 6. Unter dem *Graphen* einer Funktion $f\colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ versteht man die Relation $\{\, (n, m) \mid fn = m \,\}$.
(a) Man gebe eine induktive Definition des Prädikats $G_!$, das den Graphen der Fakultätsfunktion darstellt (es war $0! := 1$, $(\mathrm{S}n)! := (\mathrm{S}n) \cdot n!$).
(b) Wie lautet das Beseitigungsaxiom $G_!^-$?

Aufgabe 7. Man stelle fest, ob die folgenden Relationen auf $\mathbf{N}$ Äquivalenzrelationen sind:
(a) $R_1(n, m) := \exists_k\, 3 \cdot k = n \wedge \exists_l\, 3 \cdot l = m$,
(b) $R_2(n, m) := \exists_k\, 2 \cdot k = n + m$,
(c) $R_3(n, m) := (n^2 = m^2)$.

Aufgabe 8. Man definiere rekursiv eine Funktion $f\colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ so, daß $\forall_n\, f(2n) = 0$ und $\forall_n\, f(2n + 1) = 1$.

Abgabe. Montag, 5. November 2007, 10:15 Uhr, Briefkasten im 1. Stock