Mathematisches Institut
der Universität München
Helmut Schwichtenberg, Diana Ratiu

Wintersemester 2007/2008

Erste Klausur zur Vorlesung
„Elemente der Zahlentheorie, Aufbau des Zahlensystems“

Aufgabe 1. Die Regeln der Implikations-Einführung und -Beseitigung sind

$$\dfrac{\begin{matrix}[u\colon A]\\ \mid M\\ B\end{matrix}}{A \to B}\to^+ u \qquad \dfrac{\begin{matrix}\mid M\\ A \to B\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\mid N\\ A\end{matrix}}{B}\to^-$$

Sei $\neg A := (A \to F)$. Man leite her $(A \to B) \to \neg B \to \neg A$. (4 Punkte)

Aufgabe 2. (a) Man formuliere (i) mit Worten und (ii) durch Angabe einer Formel das Prinzip der Induktion für natürliche Zahlen. (2 Punkte)

(b) Man beweise durch Induktion

$$6\sum_{k=0}^{n} k^2 = n(n+1)(2n+1).$$

Die üblichen Rechenregeln dürfen ohne besondere Erwähnung verwendet werden. (4 Punkte)

Aufgabe 3. Mit a, b, c, k, n werden natürliche Zahlen bezeichnet.

(a) Man formuliere (i) mit Worten und (ii) durch Angabe einer Formel das Prinzip der Wertverlaufsinduktion für natürliche Zahlen. (4 Punkte)

(b) Man beweise, daß es zu jedem $a > 0$ ein n und eine Liste $c_0, \dots, c_n$ natürlicher Zahlen 0 oder 1 mit $c_0 = 1$ gibt so daß

$$a = \sum_{k=0}^{n} c_k 2^{n \dot{-} k}.$$

(Hinweis: Wertverlaufsinduktion nach a). (4 Punkte)

(c) Man schreibe die Zahlen 15, 16 und 17 in Binärdarstellung. (2 Punkte)

Aufgabe 4. Sei G eine Gruppe.

(a) Wann ist eine Teilmenge $U \subseteq G$ eine Untergruppe? (2 Punkte)

(b) Wann ist eine Relation $\sim$ auf G eine Äquivalenzrelation? (2 Punkte)

(c) Sei U eine Untergruppe von G. Man beweise, daß die durch

$$(x \sim_U y) := (x^{-1}y \in U)$$

definierte Relation $\sim_U$ auf G eine Äquivalenzrelation ist. (4 Punkte)