Mathematisches Institut
der Universität München
A. Freund, K. Miyamoto, H. Schwichtenberg

Sommesemester 2013
Blatt 10

Übungen zur Vorlesung
„Ausgewählte Kapitel aus der Beweistheorie“

Der für die mit $*$ gekennzeichneten Teilaufgaben benötigte Stoff wurde in der Vorlesung noch nicht behandelt. Diese Teilaufgaben zählen nicht für die Übungspunkte. Es ist aber instruktiv, sie zu bearbeiten, sobald die benötigten Begriffe definiert wurden. Die Aufgaben werden auch in der Übungsstunde besprochen.

Aufgabe 37. Wir wollen vergleichen, wie sich die rechnerische und die nicht rechnerische Variante der Implikation in Beweisen verhalten:

(a) Geben Sie eine Herleitung von $A \to^{\mathrm{c}} A$ an. Kann man die Herleitung beibehalten, wenn man $\to^{\mathrm{c}}$ durch $\to^{\mathrm{nc}}$ ersetzt?

(b) Was ist der Typ der beiden Formeln aus (a)? Was ist informell ihr rechnerischer Gehalt? Kann $A \to^{\mathrm{nc}} A$ dann beweisbar sein?

*(c) Zeigen Sie, dass die Identität vom Typ $\tau(A) \to \tau(A)$ die Formel $A \to^{\mathrm{c}} A$ realisiert.

*(d) Zeigen sie, dass die Existenz (beliebige Variante $\exists^*$) eines Realisierers von $A \to^{\mathrm{nc}} A$ die Trinkerformel für $\neg x\mathbf{r}A$ impliziert, also die Formel

$$\exists^*_t(\neg t\mathbf{r}A \to \forall_x \neg x\mathbf{r}A).$$

Nach dem Korrektheitssatz lässt sich aus einem Beweis ein Realisierer für die bewiesene Formel extrahieren. Eine allgemeine Konstruktion von Beweisen von $A \to^{\mathrm{nc}} A$ würde insbesondere die entsprechenden Fälle der Trinkerformel konstruktiv beweisen.

Aufgabe 38. Betrachten Sie die Formeln $A = \forall^{\mathrm{c}}_{x^\rho}\forall^{\mathrm{c}}_{y^\sigma} Pxy$ und $B = \forall^{\mathrm{c}}_{y^\sigma}\forall^{\mathrm{c}}_{x^\rho} Pxy$.

(a) Was sind die Typen $\tau(A)$ und $\tau(B)$ von A bzw. B relativ zum Typ $\tau(P)$ von P?

(b) Geben Sie eine Herleitung M von B aus der Annahme u^A an. Schreiben sie diese als λ-Term. Vergleichen Sie letzteren mit dem extrahierten Term $\mathrm{et}(M) = \lambda_y\lambda_x\, x_u xy$. Hierbei ist x_u der extrahierte Term zur Annahme u^A.

(c) Interpretieren Sie Ihr Ergebnis, indem Sie die Konversion $\mathrm{et}(M)xy \to^* x_u yx$ beweisen.

*(d) Zeigen Sie, dass $\mathrm{et}(M)$ wirklich die oben angegebene Form hat und Beweisen Sie den Korrektheitssatz für diesen speziellen Fall. Leiten Sie also $\mathrm{et}(M)\,\mathbf{r}\,B$ aus der Annahme $x_u \mathbf{r} A$ her.

Aufgabe 39. Es sei $\mathbf{L}(\alpha)$ die Algebra der Listen.

(a) Geben Sie die Einführungsaxiome (Klauseln) und das Beseitigungsaxiom des Totalitätsprädikats $T_{\mathbf{L}(\alpha)}$ an.

(b) Berechnen Sie jeweils den Typ der Axiome aus (a) relativ zum Typ $\tau(T_\alpha)$ von T_α. Vergleichen Sie diese mit den Typen der Konstruktoren Nil und Cons und mit dem Typ des Rekursionsoperators für Listen $L(\tau(T_\alpha))$.

*(c) Zeigen Sie, dass Konstruktoren und Rekursionsoperator entsprechend (b) die Axiome realisieren.

Aufgabe 40. Wir definieren die Verkettung von Listen durch ein induktives Prädikat A mit der Stelligkeit $(\mathbf{L}(\mathbf{N}), \mathbf{L}(\mathbf{N}), \mathbf{L}(\mathbf{N}))$. Die Einführungsaxiome lauten

$$\forall_v A(\mathrm{Nil}, v, v) \qquad \forall_{u,v,w,x}(A(u,v,w) \to A(x :: u, v, x :: w))$$

Die folgenden Aufgaben können in Minlog oder auf dem Papier bearbeitet werden. Ein Muster finden Sie in ueb10.scm auf der Vorlesungsseite.

(a) Geben Sie eine Herleitung der Formel $\forall^{\mathrm{c}}_{u \in T, v} \exists^{\mathrm{l}}_w A(u,v,w)$ an. (Tipp: Verwenden Sie das Beseitigungsaxiom für das Totalitätsprädikat $T_{\mathbf{L}(\mathbf{N})}$.)

(b) Schreiben Sie $\exists^{\mathrm{l}}_x$ als induktiv definiertes Prädikat. Wie erhält man aus diesem die Formel $\exists^{\mathrm{l}}_w A(u,v,w)$? Berechnen Sie den Typ der Formel aus (a).

*(c) Berechnen Sie den extrahierten Term der Herleitung aus (a). Welchen Typ hat dieser? Wenden sie den Term auf einige Beispiele an.

Abgabe. Mittwoch, 10. Juli 2013, in der Vorlesung.