Mathematisches Institut
der Universität München
Kenji Miyamoto, Helmut Schwichtenberg

Sommesemester 2013
Blatt 9

Übungen zur Vorlesung
„Ausgewählte Kapitel aus der Beweistheorie“

Aufgabe 33. Man überprüfe in Minlog die in Aufgabe 31 gegebenen Definitionen der Verkettung zweier Listen. Ein Muster finden Sie in ueb09.scm auf der Vorlesungsseite.

Aufgabe 34. Für die Algebra $\mathbf{T} := \mu_\xi(\mathbf{L}(\xi) \to \xi)$ der endlich verzweigten Bäume mit dem einzigen Konstruktor Branch: $\mathbf{L}(\mathbf{T}) \to \mathbf{T}$ definiere man eine Substitutionsfunktion, die je zwei endlich verzweigten Bäumen a und b einen neuen zuordnet, der aus a durch Ersetzen jedes Blatts durch b entsteht

(a) durch Definitionsgleichungen und
(b) mit Hilfe des Rekursionsoperators.

Aufgabe 35. Für jeden Typ ρ definieren wir die *punktweise Gleichheit* $=_\rho$ der Stelligkeit (ρ, ρ) induktiv. Für jede Typvariable α sei eine zweistellige Relation $=_\alpha$ der Stelligkeit (α, α) gegeben. Ist $(\rho_\nu(\iota))_{\nu<n} \to \iota$ der Typ des i-ten Konstruktors C einer Algebra ι, so hat $=_\iota$ die Klausel

$$\forall_{\vec{y},\vec{z}}((y_\nu =_{\rho_\nu(\iota)} z_\nu)_{\nu<n} \to \mathrm{C}\vec{y} =_\iota \mathrm{C}\vec{z}).$$

Für einen Pfeiltyp ist die Definition explizit (keine rekursiven Prämissen):

$$\forall_{x_1,x_2}(\forall_y(x_1 y =_\sigma x_2 y) \to x_1 =_{\rho\to\sigma} x_2).$$

Man gebe die Einführungsaxiome (Klauseln) und die Beseitigungsaxiome der punktweisen Gleichheit an für die Algebren

(a) $\mathbf{N} := \mu_\xi(\xi, \xi \to \xi)$ der natürlichen Zahlen,
(b) $\mathbf{D} := \mu_\xi(\xi, \xi \to \xi \to \xi)$ der binären Bäume,
(c) $\mathbf{O} := \mu_\xi(\xi, \xi \to \xi, (\mathbf{N} \to \xi) \to \xi)$ der Ordinalzahlen,
(d) $\mathbf{L}(\alpha) := \mu_\xi(\xi, \alpha \to \xi \to \xi)$ der Listen,
(e) $\mathbf{T} := \mu_\xi(\mathbf{L}(\xi) \to \xi)$ der endlich verzweigten Bäume.

Aufgabe 36. Es sei $\prec$ eine Prädikatenvariable, die eine zweistellige Relation darstellt. Der *erreichbare Teil* $\mathrm{Acc}_\prec$ von $\prec$ sei induktiv definiert durch

$$\forall_x(\mathbf{F} \to \mathrm{Acc}_\prec(x)),$$
$$\forall_x(\forall_{y\prec x}\mathrm{Acc}_\prec(y) \to \mathrm{Acc}_\prec(x)).$$

(a) Man gebe das Beseitigungsaxiom an.
(b) Was ist der Grund für die erste Klausel?

Abgabe. Mittwoch, 3. Juli 2013, in der Vorlesung.