Mathematisches Institut
der Universität München
Kenji Miyamoto, Helmut Schwichtenberg

Sommesemester 2013
Blatt 6

Übungen zur Vorlesung „Ausgewählte Kapitel aus der Beweistheorie“

Aufgabe 21. Es seien $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ Informationssysteme und $f\colon |\boldsymbol{A}| \to |\boldsymbol{B}|$. Dann sind äquivalent:

(a) f ist stetig bzgl. der Scott Topologie.

(b) f ist monoton und erfüllt das „Prinzip des endlichen Trägers“ (principle of finite support, PFS): ist $b \in f(x)$, so ist $b \in f(\overline{U})$ für ein $U \subseteq x$.

(c) f ist monoton und kommutiert mit gerichteten Vereinigungen: für jedes gerichtete $D \subseteq |\boldsymbol{A}|$ (d.h. für alle $x, y \in D$ gibt es ein $z \in D$ mit $x, y \subseteq z$) gilt
$$f(\bigcup_{x\in D} x) = \bigcup_{x\in D} f(x).$$

Aufgabe 22. Es seien $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B} = (B, \mathrm{Con}_B, \vdash_B)$ Informationssysteme. Dann stehen die Ideale von $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ in einer natürlichen bijektiven Korrespondenz mit den stetigen Funktionen von $|\boldsymbol{A}|$ nach $|\boldsymbol{B}|$, wie folgt.

(a) Jeder approximierbaren Abbildung $r\colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ ordnet man eine stetige Funktion $|r|\colon |\boldsymbol{A}| \to |\boldsymbol{B}|$ zu durch
$$|r|(z) := \{\, b \in B \mid r(U, b) \text{ für ein } U \subseteq z \,\}.$$
Man nennt $|r|(z)$ die *Anwendung* von r auf z.

(b) Umgekehrt ordnet man jeder stetigen Funktion $f\colon |\boldsymbol{A}| \to |\boldsymbol{B}|$ eine approximierbare Abbildung $\hat{f}\colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ zu durch
$$\hat{f}(U, b) := (b \in f(\overline{U})).$$

Man zeige, daß diese Zuordnungen wohldefiniert und invers zueinander sind, also $f = |\hat{f}|$ und $r = \widehat{|r|}$.

Aufgabe 23. (a) Man zeige, daß $r_{\mathrm{S}} := \{\, (U, \mathrm{S}a^*) \mid U \vdash a^* \,\}$ ein Ideal ist.

(b) Nach der Definition von $|r_{\mathrm{S}}|$ in Aufgabe 22(a) gilt $|r_{\mathrm{S}}|(x) = \{\, \mathrm{S}a^* \mid \exists_{U\subseteq x}(U \vdash a^*) \,\}$. Man beweise $|r_{\mathrm{S}}|(x) \subseteq |r_{\mathrm{S}}|(y) \leftrightarrow x \subseteq y$.

Aufgabe 24. Für jede der folgenden Algebren ι gebe man den Typ des Rekursionsoperators $\mathcal{R}_\iota^\tau$ mit Wertetyp τ an.

(a) $\mathbf{L}(\alpha)^+ := \mu_\xi(\alpha \to \xi, \alpha \to \xi \to \xi)$ (nicht leere Listen).

(b) $\mathbf{T}_1 := \mu_\xi(\xi, (\mathbf{N} \to \xi) \to \xi)$ und $\mathbf{T}_2 := \mu_\xi(\xi, (\mathbf{T}_1 \to \xi) \to \xi)$ (Bäume).

(c) $\mathbf{T} := \mu_\xi(\mathbf{L}(\xi) \to \xi)$ (endlich verzweigte Bäume).

Abgabe. Mittwoch, 5. Juni 2013, in der Vorlesung.