**Übungen zur Vorlesung
„Ausgewählte Kapitel aus der Beweistheorie“**

Aufgabe 17. Ein Informationssystem $\mathbf{A} = (A, \text{Con}, \vdash)$ heißt *kohärent* wenn gilt: $U \subseteq A$ ist schon dann konsistent, wenn alle seine zweielementigen Teilmengen konsistent sind.

- (a) Es seien A und B zwei abzählbare Mengen. Als Informationsatome (tokens) wählen wir Paare (a, b) mit $a \in A$ und $b \in B$. Es sei

$$\text{Con} := \{ \{ (a_i, b_i) \mid i < k \} \mid \forall_{i,j < k} (a_i = a_j \rightarrow b_i = b_j) \},$$

$$U \vdash (a, b) := (a, b) \in U.$$

In Aufgabe 12 war gezeigt, daß man so ein Informationssystem erhält. Man beweise, daß dieses Informationssystem kohärent ist.

- (b) Man gebe ein Beispiel eines inkohärenten Informationssystems.

Aufgabe 18. Es seien $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ Informationssysteme. Man zeige: ist $\mathbf{B}$ kohärent, so auch $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$.

Aufgabe 19. Es seien $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ Informationssysteme. Dann sind die Ideale von $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ genau die approximierbaren Abbildungen von $\mathbf{A}$ nach $\mathbf{B}$.

Aufgabe 20. Es sei $\mathbf{A}$ ein Informationssystem und $\mathcal{O} \subseteq |\mathbf{A}|$. Dann sind äquivalent:

- (a) $\mathcal{O}$ ist offen in der Scott Topologie.
(b) $\mathcal{O}$ erfüllt
(i) Ist $x \in \mathcal{O}$ und $x \subseteq y$, so ist $y \in \mathcal{O}$ (Alexandrov Bedingung).
(ii) Ist $x \in \mathcal{O}$, so ist $\overline{U} \in \mathcal{O}$ für ein $U \subseteq x$ (Scott Bedingung).
(c) $\mathcal{O} = \bigcup_{\overline{U} \in \mathcal{O}} \mathcal{O}_U$.

Abgabe. Mittwoch, 29. Mai 2013, in der Vorlesung.