**Übungen zur Vorlesung
„Ausgewählte Kapitel aus der Beweistheorie“**

$(D, \sqsubseteq, \perp)$ heißt *vollständige partielle Ordnung* (complete partial ordering, cpo), wenn $\sqsubseteq$ eine partielle Ordnung (also reflexiv, transitiv und antisymmetrisch) auf D ist mit kleinstem Element $\perp$, und jede gerichtete Teilmenge $S \subseteq D$ ein Supremum $\bigsqcup S$ in D besitzt. Hierbei heißt $S \subseteq D$ *gerichtet*, wenn S bewohnt ist und für alle $x, y \in S$ es ein $z \in S$ gibt mit $x \sqsubseteq z$ und $y \sqsubseteq z$.

Aufgabe 13. Es sei $\mathbf{A} = (A, \text{Con}, \vdash)$ ein Informationssystem. Man zeige, daß $(|\mathbf{A}|, \subseteq, \emptyset)$ eine vollständige partielle Ordnung mit Supremum $\bigcup$ ist.

Es sei $(D, \sqsubseteq, \perp)$ cpo. Ein $x \in D$ heißt *kompakt*, wenn für jede gerichtete Teilmenge $S \subseteq D$ mit $x \sqsubseteq \bigsqcup S$ ein $z \in S$ existiert mit $x \sqsubseteq z$. Die Menge aller kompakten Element von D heißt *Basis* von D ; sie wird mit D_c bezeichnet.

Aufgabe 14. Es sei $\mathbf{A} = (A, \text{Con}, \vdash)$ ein Informationssystem. Man zeige $|\mathbf{A}|_c = \{ \bar{U} \mid U \in \text{Con} \}$ mit $\bar{U} := \{ a \in A \mid U \vdash a \}$ (deduktiver Abschluß).

Eine cpo $(D, \sqsubseteq, \perp)$ heißt *algebraisch*, wenn jedes $x \in D$ Supremum seiner kompakten Approximationen ist, also

$$x = \bigsqcup \{ u \in D_c \mid u \sqsubseteq x \}.$$

Aufgabe 15. Es sei $\mathbf{A} = (A, \text{Con}, \vdash)$ ein Informationssystem. Man zeige, daß $(|\mathbf{A}|, \subseteq, \emptyset)$ algebraisch ist.

Eine cpo $(D, \sqsubseteq, \perp)$ heißt *beschränkt vollständig*, wenn jede beschränkte Teilmenge S von D eine kleinste obere Schranke $\bigsqcup S$ in D besitzt. Sie heißt *Bereich* (domain), wenn sie algebraisch und beschränkt vollständig ist.

Aufgabe 16. Es sei $\mathbf{A} = (A, \text{Con}, \vdash)$ ein Informationssystem. Man zeige, daß $(|\mathbf{A}|, \subseteq, \emptyset)$ ein Bereich ist, dessen kompakte Elemente sich schreiben lassen als $|\mathbf{A}|_c = \{ \bar{U} \mid U \in \text{Con} \}$.

Abgabe. Mittwoch, 22. Mai 2013, in der Vorlesung.