Mathematisches Institut
der Universität München
Kenji Miyamoto, Helmut Schwichtenberg

Sommesemester 2013
Blatt 3

Übungen zur Vorlesung „Ausgewählte Kapitel aus der Beweistheorie“

Aufgabe 9. Wir arbeiten in einer Sprache mit einem dreistelligen Relationssymbol R, einer Konstanten 0 und einem einstelligen Funktionssymbol S. Die intuitive Bedeutung von $Ryxz$ ist $y + 2^x = z$, und wir können dies ausdrücken durch die beiden („Horn“-) Klauseln

$$\mathrm{Hyp}_1 := \forall_y R(y, 0, \mathrm{S}y),$$
$$\mathrm{Hyp}_2 := \forall_{y,x,z,z_1}(Ryxz \to Rzxz_1 \to R(y, \mathrm{S}x, z_1)).$$

Sei

$$A_0(x) := \forall_y \exists_z Ryxz,$$
$$A_{i+1}(x) := \forall_{y\in A_i} \exists_{z\in A_i} Ryxz,$$

wobei $\forall_{z\in A_i} B$ für $\forall_z(A_i(z) \to B)$ steht. Man beweise
(a) $\forall_x(A_i(x) \to A_i(\mathrm{S}x))$ aus Hyp_2 und
(b) $A_i(0)$ aus Hyp_1 und Hyp_2.

Aufgabe 10. Man beweise

$$D_i := \exists_{z_i,z_{i-1},\dots,z_0}(R00z_i \wedge R0z_iz_{i-1} \wedge \dots \wedge R0z_1z_0)$$

aus Hyp_1 und Hyp_2.

Aufgabe 11. Man beweise in Minlog

$$D_i := \exists^{\mathrm{l}}_{z_i} \exists^{\mathrm{u}}_{z_{i-1},\dots,z_0}(R00z_i \wedge R0z_iz_{i-1} \wedge \dots \wedge R0z_1z_0)$$

aus Hyp_1 und Hyp_2, für $i = 0, 1, 2$. Aus dem Beweis extrahiere man die Realisierer (siehe dazu `aufgabe11.scm` auf der Vorlesungsseite).

Aufgabe 12. Es seinen A und B zwei abzählbare Mengen. Als Informationsatome (tokens) wählen wir Paare (a, b) mit $a \in A$ und $b \in B$. Es sei

$$\mathrm{Con} := \{\, \{\, (a_i, b_i) \mid i < k \,\} \mid \forall_{i,j<k}(a_i = a_j \to b_i = b_j) \,\},$$
$$U \vdash (a, b) := (a, b) \in U.$$

Man zeige, daß man damit ein Informationssystem erhält, dessen Ideale die Graphen aller partiellen Funktionen von A nach B sind.

Abgabe. Mittwoch, 15. Mai 2013, in der Vorlesung.