Mathematisches Institut
der Universität München
Kenji Miyamoto, Helmut Schwichtenberg

Sommesemester 2013
Blatt 2

Übungen zur Vorlesung „Ausgewählte Kapitel aus der Beweistheorie“

Zu jeder Ordinalzahl $\alpha < \varepsilon_0$ sei ihre Gödelnummer $\ulcorner\alpha\urcorner$ und zu jeder natürlichen Zahl x ihre Ordinalzahl $\mathrm{o}(x)$ wie in der Vorlesung definiert. Ferner sei die Relation $x \prec y$ definiert durch $\mathrm{o}(x) < \mathrm{o}(y)$.

Aufgabe 5. Man zeige
(a) $\mathrm{o}(\ulcorner\alpha\urcorner) = \alpha$,
(b) $\ulcorner\mathrm{o}(x)\urcorner = x$.

Aufgabe 6. Man zeige, daß $\prec$ elementar ist.

Aufgabe 7. Aus dem Induktionsschema

$$A(0) \to \forall_x(A(x) \to A(Sx)) \to \forall_x A(x)$$

für beliebige Formeln $A(x)$ beweise man – nach Wahl per Hand oder mit Minlog – das folgende Prinzip der dreifachen Induktion

```
(set-goal "S 0 0 0 ->
 all n,m,k(S n m k -> S n m(Succ k)) ->
 all n,m(all k S n m k -> S n(Succ m)0) ->
 all n(all m,k S n m k -> S(Succ n)0 0) ->
 all n,m,k S n m k")
```

Falls Minlog verwendet wird, können Sie sich an der Datei ind.scm (mit einfachen Induktionsbeweisen) orientieren, die auf der Vorlesungsseite zu finden ist. Ihre Lösung schicken Sie dann bitte per email an
Lucas.Hoffmann[at]campus.lmu.de.

Aufgabe 8. Jeder Formel $A(x)$ ordne man eine Formel $A^*(x)$ (bezüglich einer festen Variablen x) zu durch

$$A^*(x) := \forall_y(\forall_{z<y} A(z) \to \forall_{z<y+2^x} A(z)).$$

(a) Man zeige

Wenn $A(x)$ $<$-progressiv ist, so auch $A^*(x)$,

wobei „$B(x)$ *$<$-progressiv*“ bedeutet $\forall_x(\forall_{y<x} B(y) \to B(x))$.
(b) Welche Eigenschaften der Relation $Ryxz := (z < y + 2^x)$ werden in dem Beweis benutzt?

Abgabe. Mittwoch, 8. Mai 2013, in der Vorlesung.