Übungen zur Vorlesung „Mathematische Logik“

Aufgabe 45. (4 Punkte). Es sei T eine Theorie wie in Abschnitt 3.2 der Vorlesung.

(a) Beweisen Sie: sind $M, N \subseteq \mathbb{N}$ repräsentierbar in T, so auch $M \cap N$.
(b) Es seien $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ in T repräsentierbar durch die Formeln $A(x, y)$ bzw. $B(y, z)$. Beweisen Sie, daß dann auch $g \circ f$ in T repräsentierbar ist.

Aufgabe 46. (4 Punkte). Es sei T eine Theorie wie in Abschnitt 3.2 der Vorlesung. Eine geschlossene Formel G heißt Gödelsatz wenn

$$T \vdash G \leftrightarrow \neg P(\underline{\ulcorner G \urcorner}) \qquad \text{wobei } P(x) := \exists_y B_{\mathrm{Prf}_T}(y, x).$$

(a) Beweisen Sie, daß es einen Gödelsatz gibt.
(b) Es sei G ein Gödelsatz. Wir nehmen zusätzlich an, daß (i) für alle geschlossenen Formeln A gilt: wenn $T \vdash A$, so auch $T \vdash P(\underline{\ulcorner A \urcorner})$, und (ii) $T \nvdash \bot$. Beweisen Sie $T \nvdash G$.

Aufgabe 47. (4 Punkte). Es sei NatGcd definiert durch

$$\begin{aligned}
\mathrm{NatGcd}(0, n) &:= n \\
\mathrm{NatGcd}(n, 0) &:= n \\
\mathrm{NatGcd}(Sn, Sm) &:= \begin{cases} \mathrm{NatGcd}(S(n), m - n) & \text{falls } n < m \\ \mathrm{NatGcd}(n - m, S(m)) & \text{sonst} \end{cases}
\end{aligned}$$

Beweisen Sie in Minlog (s. ueb12.scm)

(a) NatGcdSelf: $\forall_n(\mathrm{NatGcd}(n, n) = n)$
(b) NatGcdOne: $\forall_n(\mathrm{NatGcd}(1, n) = 1)$
(c) NatGcdComm: $\forall_{n,m}(\mathrm{NatGcd}(n, m) = \mathrm{NatGcd}(m, n))$

Aufgabe 48. (4 Punkte). Es sei $\mathrm{NatDiv}(n, m) := \exists_{l \leq m}(l \cdot n = m)$. Beweisen Sie in Minlog (s. ueb12.scm)

(a) NatGcdDiv0: $\forall_{n,m}(\mathrm{NatDiv}(\mathrm{NatGcd}(n, m), n))$
(b) NatGcdDiv1: $\forall_{n,m}(\mathrm{NatDiv}(\mathrm{NatGcd}(n, m), m))$
(c) NatDivGcd:
$\forall_{n,m,l}(\mathrm{NatDiv}(l, n) \to \mathrm{NatDiv}(l, m) \to \mathrm{NatDiv}(l, \mathrm{NatGcd}(n, m)))$

Abgabe. Mittwoch, 21. Januar 2026 um 8:00, über Uni2work.