Mathematisches Institut der LMU
Helmut Schwichtenberg

Wintersemester 2025/26
ueb08

Übungen zur Vorlesung „Mathematische Logik“

Aufgabe 29. (4 Punkte). Die Binärdarstellung positiver natürlicher Zahlen $\mathbb{P}$ sei durch die Konstruktoren 1, S_0 (verdoppeln) und S_1 (verdoppeln +1) gegeben. Wir definieren $\mathrm{NP}\colon \mathbb{N} \to \mathbb{P}$ und $\mathrm{PN}\colon \mathbb{P} \to \mathbb{N}$ durch

$$\mathrm{NP}(0) = \mathrm{NP}(S(0)) = 1, \quad \mathrm{NP}(S(S(n))) = \begin{cases} S_0(\mathrm{NP}(S(H(n)))) & \text{falls } E(n) \\ S_1(\mathrm{NP}(S(H(n)))) & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\mathrm{PN}(1) = S(0), \quad \mathrm{PN}(S_0(p)) = D(\mathrm{PN}(p)), \quad \mathrm{PN}(S_1(p)) = S(D(\mathrm{PN}(p))).$$

Beweisen Sie informal

(a) $\mathrm{NP}(\mathrm{PN}(p)) = p$,

(b) $\mathrm{PN}(\mathrm{NP}(S(n))) = S(n)$.

Die Funktionen H ($n \mapsto \lfloor n/2 \rfloor$), D ($n \mapsto 2n$) und E ($n \mapsto$ „n ist gerade“) und ihre Eigenschaften dürfen ohne Beweis verwendet werden. Hinweis. (a). Induktion über p. Ohne Beweis dürfen verwendet werden:

$$\begin{aligned} \text{NPDouble}: &\quad 0 < n \to \mathrm{NP}(D(n)) = S_0(\mathrm{NP}(n)), \\ \text{NPSuccDouble}: &\quad 0 < n \to \mathrm{NP}(S(D(n))) = S_1(\mathrm{NP}(n)). \end{aligned}$$

(b). Induktion über n. Ohne Beweis darf verwendet werden:

$$\text{CVInd}: \quad \forall_n (\forall_{m<n} \mathit{ws}(m) \to \mathit{ws}(n)) \to \forall_n \mathit{ws}(n)$$

mit ws eine Variable vom Typ $\mathbb{N} \to \mathbb{B}$.

Aufgabe 30. (4 Punkte). Beweisen Sie

(a) Für jede subelementare Funktion $f\colon \mathbb{N}^r \to \mathbb{N}$ gibt es eine natürliche Zahl k so daß für alle $\vec{n} = n_1, \dots, n_r$ gilt

$$f(\vec{n}\,) < 2^{k(\max(\vec{n},1))}.$$

(b) Die Funktion $n \mapsto 2^{n \cdot n}$ ist nicht subelementar.

Aufgabe 31. (4 Punkte). Definieren Sie die folgenden Programme durch explizite Angabe von Instruktionen, d.h. Basisinstruktionen und den in der Vorlesung (Abschnitt 2.1.2) definierten Programmkonstrukten.

(a) $P(x; y)$ berechnet 2^x.

(b) $H(x; y)$ berechnet $\lfloor \frac{x}{2} \rfloor$, d.h. die größte Zahl $\leq \frac{x}{2}$.

(c) $L(x; y)$ berechnet den ganzzahligen Logarithmus zur Basis 2, d.h. für $0 < x$ die Zahl y mit $2^y \leq x < 2^{y+1}$.

Aufgabe 32. (4 Punkte). Formalisieren Sie die Beweise aus Aufgabe 29 (siehe `ueb08.scm`).

Abgabe. Mittwoch, 10. Dezember 2025 um 8:00, über Uni2work.